

- 3 Con tu grupo y con la ayuda de su profesora o profesor, comenten la siguiente información.

Los pares de valores (x, y) que se generan con la regla de correspondencia $y = 3x + 10$ corresponden a puntos que están alineados, es decir, se puede trazar una recta que pase por todos esos puntos.

- 4 En el mismo plano ubica los puntos de la relación entre número de juegos y costo del plan B. Haz lo mismo con el plan C. Usa un color diferente para cada plan.

- 5 Usa las gráficas para contestar las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuánto debe pagarse en cada plan por ir a la feria y subirse a 6 juegos?

Con el plan A \$28 Con el plan B \$25 Con el plan C \$30

- b) Los puntos del plan B están alineados horizontalmente. ¿A qué se debe?

A que el valor es constante

- c) ¿Cuánto debe pagar alguien que va a la feria, pero no se sube a ningún juego?

Con el plan A \$10 Con el plan B \$25 Con el plan C \$0

- d) ¿A cuál de las tres gráficas pertenece el punto en el que se cortan los dos ejes, es decir, el punto

origen? a C ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto? (0,0)

¿A cuántos juegos corresponde la abscisa de ese punto? A 0 juegos

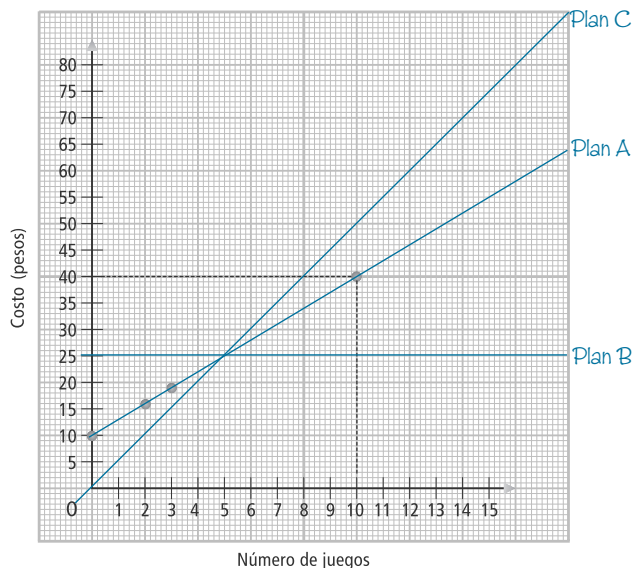
¿A qué cantidad de dinero corresponde la ordenada? a \$10

- 6 Con ayuda de su profesor o profesora, realicen lo siguiente.

- a) Comenten la información del recuadro.
b) De acuerdo con las gráficas, analicen qué plan es el más barato. Observen que eso depende del número de juegos que se visiten.

Respuesta libre

La **gráfica cartesiana** de una **relación de proporcionalidad** es un conjunto de puntos que están sobre una recta. La recta pasa por el origen del sistema de ejes.



Si se analizan los puntos de la gráfica, se obtiene:

m	50	100	150	200	250	300
a	85	170	255	340	425	510

La razón de proporcionalidad es $k = 1.7$, es decir $a \approx 1.7 m$

Valoración del desempeño

- Explica las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.
- Grafica relaciones de proporcionalidad.

4.7. Explicar las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.

Sugerencias didácticas

Una gran variedad de situaciones en la vida cotidiana son proporcionales; establecer la relación que rige una tabla o una gráfica permite reconocer las tendencias que pueden seguir otras cantidades que se rigen bajo la misma relación. También permiten comparar para tomar decisiones.

Es un contenido básico para la comprensión del porcentaje. Favorece la noción de variable y de función.

Se sugiere al profesor que induzca a los estudiantes a observar las gráficas y determinar mediante las propiedades de éstas, los comportamientos de la relación (en este caso de proporcionalidad) por ejemplo, el estudiante puede notar que cuanto más inclinada es la pendiente de una gráfica, es mayor la velocidad de cambio.

Valoración del desempeño

- Interpreta una gráfica cartesiana de una relación de proporcionalidad.
- Comprende cuándo una relación es proporcional o no proporcional.
- Identifica las relaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad que rigen los datos de tablas y/o gráficas.

Lección 85 Viajar en automóvil

En un viaje en automóvil intervienen varias magnitudes relacionadas: la distancia, el tiempo del recorrido, la velocidad, el consumo de gasolina, entre otras.



- 1 Dos automóviles, A y B, mantuvieron una velocidad constante durante cierto tiempo. La gráfica roja muestra la relación entre la distancia recorrida por el automóvil A y el tiempo.**

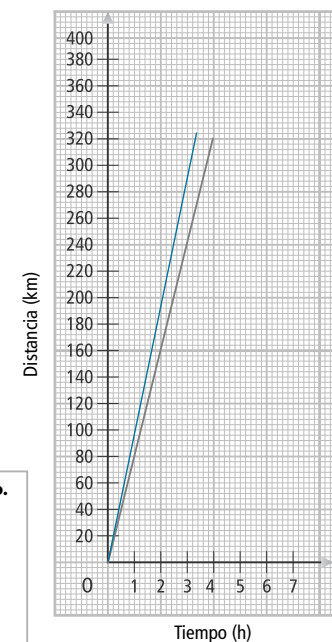
Abajo hay dos tablas con datos de los recorridos de los dos automóviles.

- Completa los datos que faltan en la tabla del automóvil A, a partir de la información de la gráfica.
- Anota debajo de las tablas las reglas de correspondencia. Representa el tiempo con la letra t y la distancia con la letra d .
- Traza, con un color diferente, la gráfica del automóvil B, a partir de los datos de la tabla.



- 2 Contesten las siguientes preguntas en grupo.**

- ¿Alguna de las relaciones es de proporcionalidad? Sí, las dos
- ¿Qué indica que una gráfica esté más inclinada que la otra? Que el automóvil va más rápido que el otro



Automóvil A	
Tiempo (h)	Distancia (km)
0	0
1	80
$2\frac{1}{2}$	200
3	240
$3\frac{1}{2}$	280
4	320

$$d = 80t$$

Automóvil B	
Tiempo (h)	Distancia (km)
0	0
1	100
$2\frac{1}{2}$	250
3	300
$3\frac{1}{2}$	350
4	400

$$d = 100t$$

- 3** Las gráficas de la derecha muestran las relaciones entre la distancia recorrida y la cantidad de gasolina que consume cada automóvil; analízalas y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué automóvil tiene mejor rendimiento de gasolina?

El B

b) ¿Cómo lo sabes? Recorre más distancia con la misma gasolina que A

c) ¿Qué significa en este caso que una gráfica esté más "inclinada" que la otra? Que la gasolina rinde más

d) Estas dos relaciones son de proporcionalidad. Da al menos una prueba de ello.

En A: $y = x \cdot 12$, en B: $y = x \cdot 17$

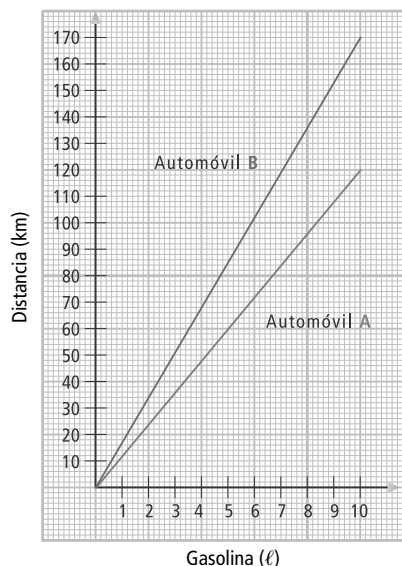
e) Escribe los datos que faltan en las tablas y escribe las reglas de correspondencia. Representa la distancia recorrida con la letra d y la cantidad de gasolina consumida con la letra c .

Automóvil A	
Gasolina (ℓ)	Distancia (km)
1	12
2	24
5	60
10	120
15	180
20	240

$d = 12c$

Automóvil B	
Gasolina (ℓ)	Distancia (km)
1	17
2	34
5	85
10	170
15	255
20	340

$d = 17c$



- 4** Compara los resultados que encuentre en la actividad anterior con los de tus compañeros y compañeras.

- 5** Investiga el precio actual de un litro de gasolina.

- a) Elabora una tabla que muestre el precio de 10, 20, 30, 40 y 50 litros de gasolina.
b) Grafica en un plano cartesiano los datos de tu tabla.
c) Encuentra la regla de correspondencia que relaciona el número de litros de gasolina con su precio.



4.7. Interpretar una gráfica cartesiana de una relación de proporcionalidad.

Otros recursos

Se sugiere la siguiente página de Internet para acceder a más ejemplos de gráficas de proporcionalidad:

<http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/guias/proporcionalidad/GuiaProporcionalidaddirecta/GuiaProporcionalidadDirecta.htm>

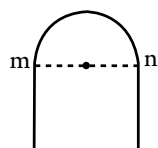
Sugerencias didácticas

Esta lección se puede aprovechar para que el alumno dibuje y se divierta mientras utiliza conocimientos básicos de geometría.

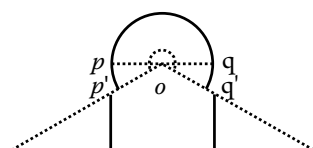
Solucionario

1

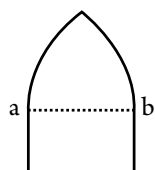
a)



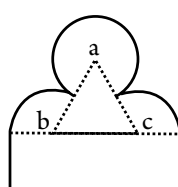
b)



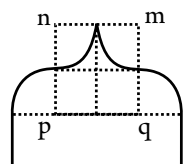
c)



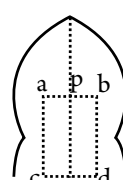
d)



e)



f)



Lección 86 El círculo en la arquitectura

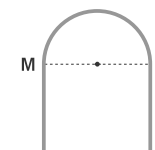
Desde la antigüedad el círculo ha sido ampliamente usado en elementos arquitectónicos, prueba de ello son los arcos que adornan diferentes tipos de construcciones.



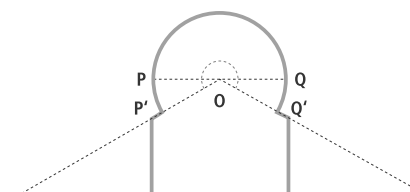
1 Analicen los arcos que se presentan y juntos planeen una manera de trazarlos en sus cuadernos usando sus instrumentos geométricos. Cuando se hayan puesto de acuerdo trácenlos.

Para ayudarlos, se muestran algunos trazos auxiliares con líneas punteadas. Además, cuando es necesario, se dan datos adicionales de trazo.

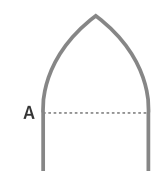
a) **Arco de medio punto.** Se usó en la arquitectura romana y del Renacimiento. Trácenlo de tal manera que el segmento MN mida 8 cm.



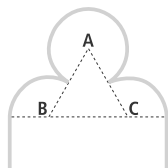
b) **Arco de herradura.** Lo usaron sobre todo los árabes. Trácenlo de tal manera que el ángulo P'OQ' (marcado con rojo) mida 240° y que el segmento PQ mida 8 cm.



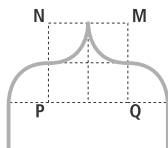
c) **Arco ojival.** Arco característico del estilo gótico usado por los europeos en la Edad Media. Trácenlo de tal manera que el segmento AB mida 8 cm.



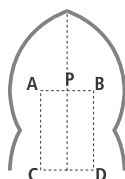
- d) **Arco trebolado.** Se ha usado ampliamente en el arte árabe. Reprodúzcanlo de manera que el triángulo equilátero **ABC** mida 6 cm por lado.



- e) **Arco de talón.** Usado en el arte indio y bizantino. Reprodúzcanlo de manera que el cuadrado **MNPQ** mida 6 cm de lado.



- f) **Arco apuntado.** Propio de la arquitectura árabe. Reprodúzcanlo de tal manera que el rectángulo tenga dimensiones **AB = 4 cm** y **AC = 6 cm**. **P** es punto medio de **AB**. Los arcos se trazan abriendo el compás a la medida **DP** y apoyándolo en cada vértice del rectángulo.



2 Platicuen ante su grupo el procedimiento para hacer algunos de los arcos.

Valoración del desempeño

- Construye círculos a partir de diferentes condiciones.

Otros recursos

Se recomienda el siguiente texto para conocer más datos respecto a la importancia del círculo en la arquitectura:

Concha Diez-Pastor Iribas. *El círculo en la arquitectura: esencia y transformación histórica*. Anuario de la Universidad Internacional, 2007, pp. 105-114.

Sugerencias didácticas

Así como anteriormente se vio la importancia del trazo de triángulos, el trazo de círculos es también muy importante en la geometría. Se sugiere que el profesor mencione a sus estudiantes que existe una caracterización del círculo (es decir, una propiedad que es cumplida por una figura, si y sólo si esta figura es un círculo) y esta caracterización consiste en que el círculo es la única figura tal que todos y cada uno de sus puntos distan lo mismo del centro.

Solucionario

1

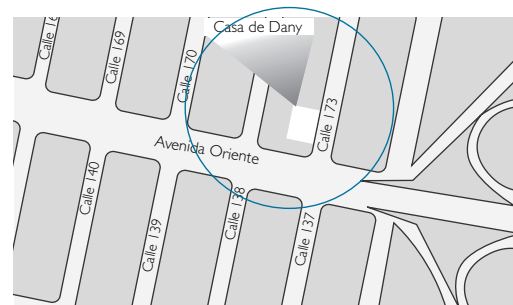
- a) $100 \text{ m} \left(\frac{1}{5000} \right) = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$. Se traza un círculo de radio 2 cm, con centro en la casa de Dany.
- b) Se traza una cuerda cualquiera del círculo y entonces se traza la mediatriz de esa cuerda, luego, se traza una segunda cuerda y su mediatriz, el punto donde concurren ambas mediatrices es el centro de la circunferencia.
- c) Se unen los puntos formando así un triángulo, luego trazamos el circuncentro del triángulo (es decir, el punto donde concurren las mediatrices de cada uno de los lados). Ése es el punto buscado.
- d) Un número infinito, pues tres puntos determinan una circunferencia y si trazamos la recta perpendicular a la trazada, tenemos una infinidad de puntos que junto con los otros dos determinan una circunferencia (una por cada terna de puntos).
- e) Trazamos el baricentro (el punto donde concurren las bisectrices del triángulo). Éste es el punto buscado.

Lección 87 Círculos y algo más

El trazo de círculos, circunferencias, mediatrices y bisectrices es útil en la resolución de problemas diversos.

1 Resuelve los siguientes problemas.

- a) **Conexión a internet.** Dany contrató en su línea telefónica un servicio de internet sin cable; le informaron que puede conectarse sólo si está a menos de 100 m de distancia de su línea telefónica. El siguiente plano está hecho a escala 1:5000. Marca en el plano toda la región que abarca la conexión desde donde Dany puede conectarse a internet.

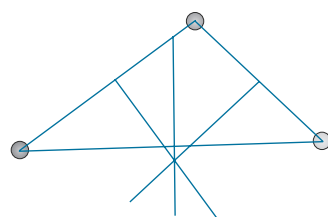


Soluc.

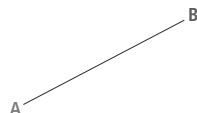
- b) **El plato roto.** Un arqueólogo encontró esta parte de un plato circular y quiere reconstruirlo; para ello es necesario hallar el centro del plato y trazarlo. Marca el centro del plato y comprueba con tu compás trazando el plato completo. (Pista: recuerda las propiedades de la mediatriz que estudiaste en la lección 36 y traza dos segmentos que se convengan.)



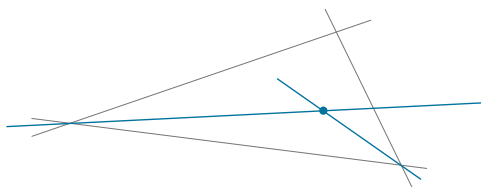
- c) **El hospital.** Se desea construir un hospital que quede a la misma distancia de tres ciudades (representadas con un punto). Marca el punto donde debe construirse el hospital y comprueba con tu compás que está a la misma distancia de las tres ciudades.



- d) **La cuerda floja.** Traza varias circunferencias que pasen por los puntos A y B. ¿Cuántas pudiste trazar? _____



- e) **La gasolinera.** Tres carreteras se cortan formando un triángulo. Se desea construir una gasolinera que esté dentro del triángulo y a la misma distancia de las tres. Si las rectas representan las carreteras, marca el punto donde consideras debe estar la gasolinera y comprueba con tu compás que está a la misma distancia de las tres rectas.



2 Compara tus soluciones con las de tus compañeros y compañeras y platica con ellos la manera en que las encontraste.



Los elementos principales de un círculo son su *centro* y su *radio*. A partir de estos dos elementos, el círculo queda determinado y puede trazarse.

También se pueden trazar círculos a partir de otros elementos; por ejemplo, a partir del diámetro o de tres puntos de la circunferencia.

En los problemas de trazado de círculos, dependiendo de los elementos dados, puede haber una solución, muchas soluciones, o bien, ninguna.

4.4. Resolución de problemas que se relacionan con el trazo de círculos.

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas que se relacionan con el trazo de círculos.

Otros recursos

Se sugiere al maestro consultar el siguiente libro para conocer más teoremas y demostraciones respecto a la construcción y propiedades de figuras geométricas:

Bulajich Radmila y José Antonio Gómez. “Geometría”. *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.

Sugerencias didácticas

Se sugiere al profesor motivar el interés del estudiante relatando brevemente la historia de este interesante número: π (pi) es un número irracional, cociente entre la longitud de la circunferencia (perímetro) y la longitud de su diámetro. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería. El valor numérico de π , truncado a sus primeras cifras, es el siguiente:

$$\pi \approx 3.1415926535897932384 \dots$$

La notación con la letra griega π proviene de la inicial de las palabras de origen griego “περιφέρεια” (periferia) y “περίμετρον” (perímetro) de una circunferencia. Esta notación fue usada por primera vez en 1706 por el matemático galés William Jones y popularizada por el matemático Leonhard Euler en su obra *Introducción al cálculo infinitesimal* de 1748. Fue conocida anteriormente como constante de Ludolph (en honor al matemático Ludolph van Ceulen) o como constante de Arquímedes (no se debe confundir con el número de Arquímedes).

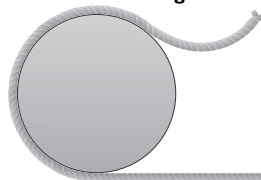
El valor de π ha sido conocido con distinta precisión a lo largo de la historia, siendo una de las constantes matemáticas que más aparece en las ecuaciones de la física, junto con el número e . Tal vez por ello sea la constante que más pasiones desata entre los matemáticos profesionales y aficionados. La constancia de la razón de la circunferencia al diámetro no es válida en geometrías no euclídeas.

Lección 88 Dar la vuelta

Cuanto mayor es un círculo, mayor es su circunferencia y mayor su diámetro. Sin embargo, hay algo que no varía, ¿sabes qué es?



1 Reúnete con dos compañeros o compañeras. Van a trabajar con seis círculos. Para agilizar la actividad, cada uno puede trabajar con dos círculos.



- Recorten 6 círculos de cartulina con radios de 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm y 8 cm.
- Con ayuda de hilaza (o hilo que sea resistente y no estire) averigüen la medida del contorno de cada círculo.
- Escriban en la tabla los datos que se piden. Utilicen una calculadora para hacer las divisiones.

Medida del contorno	Medida del diámetro	Medida del contorno ÷ Medida del diámetro
18.8 cm	6 cm	3.1459
25.1 cm	8 cm	3.1459
31.4 cm	10 cm	3.1459
37.7 cm	12 cm	3.1459
44.0 cm	14 cm	3.1459
50.3 cm	16 cm	3.1459

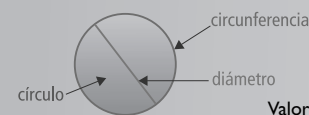
d) Observen que los resultados de la tercera columna son muy próximos entre sí.

e) ¿Aproximadamente cuántas veces cabe el diámetro en el contorno del círculo? 3.14



2 Comenten sus resultados con los de otros equipos, lean la siguiente información y contesten las preguntas que vienen después.

En sexto grado estudiaste que el contorno del círculo recibe el nombre de circunferencia y que si divides la medida de la circunferencia de cualquier círculo entre su diámetro obtienes un valor muy cercano al número llamado **Pi**. Este número se simboliza con la letra griega π y tiene un valor aproximado de 3.14.



$$\pi = \frac{\text{medida de la circunferencia}}{\text{medida del diámetro}}$$

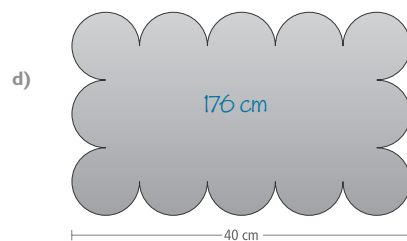
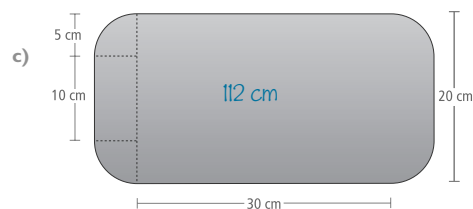
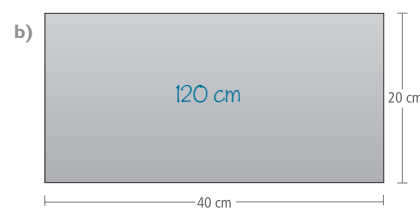
Valor aproximado de π : 3.14

a) ¿Cómo se puede calcular la medida de la circunferencia de un círculo si se conoce la medida de su diámetro? Circunferencia = π × diámetro

b) El tamaño de la circunferencia de un círculo es proporcional al tamaño de su diámetro. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de esa relación? Sí, 3.14

- 3 Resuelve esta actividad; después, reúnete con tus compañeros y compañeras de equipo y comparen resultados y procedimientos. Si son diferentes, traten de hallar dónde se equivocaron.**

Doña Luisa hace manteles de tela y les pone listón en el contorno. En cada caso calcula la mínima cantidad de listón que necesita para cada tipo de mantel. Anótala dentro de cada uno.



- 4 Comparen sus procedimientos y resultados con los de otros equipos.**

Valoración del desempeño

- Conoce el número irracional π .
- Justifica la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia.
- Calcula el perímetro de un círculo.

Otros recursos

Se sugiere al maestro que recomiende a sus estudiantes la siguiente película respecto a la historia de un matemático que cree en las matemáticas de la naturaleza:

Pi: El orden del caos

Dirección: Darren Aronofsky

País: Estados Unidos

Año: 1998

Género: Thriller

Ciencia ficción

Sugerencias didácticas

En la presente lección se da una justificación de la fórmula para obtener el área de un círculo, a continuación se propone una justificación alterna:

El área del círculo se deduce sabiendo que la superficie interior de cualquier polígono regular es igual al producto del apotema por el perímetro del polígono dividido entre 2, es decir: $A = \frac{p \times a}{2}$

Considerando la circunferencia como el polígono regular de infinitos lados, entonces, el apotema coincide con el radio de la circunferencia, y el perímetro con la longitud, por tanto, el área interior es:

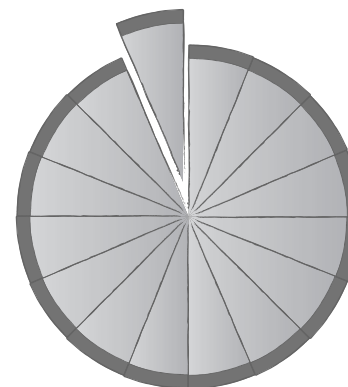
$$A = \frac{p \times a}{2} = \frac{L \times r}{2} = \frac{(2 \times \pi \times r) \times r}{2} = \frac{2 \times \pi \times r^2}{2} = \pi \times r^2$$

Una vez más el estudiante debe comprender que las fórmulas tienen una justificación.

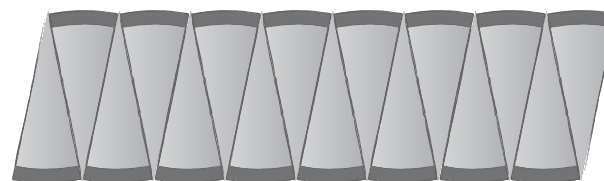
Lección 89 En la pizzería I

¿Sabías que un círculo se puede transformar en algo muy parecido a un rectángulo para calcular su área?

- 1 Una pizza que mide 20 cm de diámetro está cortada en 16 rebanadas.



Las rebanadas se colocan como se muestra.



- a) ¿A qué figura geométrica se parece este arreglo de las rebanadas? A un romboide

- b) Con ayuda de este arreglo busquen una manera de calcular el área de la pizza y escriban en su cuaderno su procedimiento. $\text{Área del romboide} = b \times h, b = \frac{\text{circunferencia}}{2} = \frac{\pi \times D}{2} = \pi r, h = r$

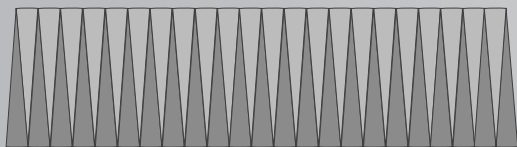
Área de la pizza: πr^2



- 2 Cuando hayan terminado realicen lo siguiente:

- a) Comenten en su grupo cómo lo hicieron.
b) Lean y comenten con la ayuda de su profesor el siguiente procedimiento para obtener la fórmula del área del círculo.

Imagina que partimos la pizza en rebanadas cada vez más pequeñas; observarás que entre más pequeñas sean las rebanadas el arreglo se parecerá más a un rectángulo.



1. Si se considera a la figura como un rectángulo, puede decirse que:

- El área del círculo es aproximadamente igual al área del rectángulo, y el área del rectángulo se calcula multiplicando base por altura.

2. Observa que la base del rectángulo es la mitad del perímetro del círculo y la altura del rectángulo es el radio del círculo. Por lo tanto:

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{perímetro}}{2} \times r$$

3. Recuerda, además, que el perímetro del círculo es $\pi \times \text{diámetro}$, entonces:

$$\text{Área del círculo} = \frac{\pi \times \text{diámetro}}{2} \times r = \pi \times \frac{\text{diámetro}}{2} \times r$$

4. Finalmente, dado que la mitad del diámetro es el radio, tenemos que:

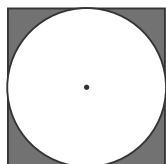
$$\text{Área del círculo} = \pi \times r \times r = \pi \times r^2 = \pi r^2$$

Es decir, el área de un círculo es igual al producto de π (que vale aproximadamente 3.14) por el cuadrado de la medida del radio.

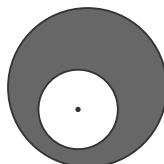
- c) ¿Se cumplirá siempre la simplificación del paso 3? Haz una prueba con números: verifica si $\frac{4 \times 9}{3}$ es igual a $4 \times \frac{9}{3}$.

Haz pruebas con otros números y verás que siempre se cumple.

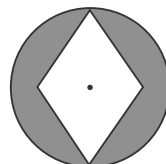
3 Calcula el área de color en cada figura. Toma las medidas necesarias.



1.93 cm²



5.30 cm²



4.07 cm²

Valoración del desempeño

- Justifica la fórmula para calcular el área del círculo.

Otros recursos

En la siguiente página encontrará más definiciones y propiedades relativas al círculo:

<http://math2.org/math/geometry/es-circles.htm>

Sugerencias didácticas

Mencione a sus estudiantes que una de las formas más difundidas en la naturaleza es la circular. Casi todas las formas tienden a hacerse más o menos “redondeadas”. Cuando en matemáticas un conjunto de puntos tiene una propiedad común dicho conjunto se denomina lugar geométrico.

El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro, que se denomina centro, es una circunferencia.

El segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia es el radio de la circunferencia. El círculo es un muy útil recurso para resolver distintos problemas, por ejemplo, problemas de proporcionalidad, ya en una lección anterior vimos cómo gran parte de la utilidad de una gráfica de pastel, se debe a las propiedades del círculo.

Valoración del desempeño

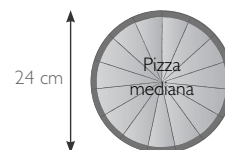
- Resuelve problemas que implican calcular el área de un círculo.
- Resuelve problemas que implican calcular el perímetro de un círculo.

Lección 90 En la pizzería II

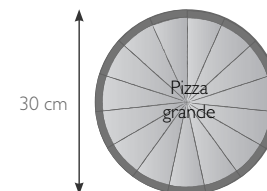
El cálculo de área del círculo se aplica en la resolución de diversos problemas.

1 Los clientes de una pizzería pidieron lo siguiente:

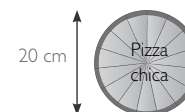
En la mesa 1 había cuatro personas y pidieron una pizza mediana.



En la mesa 2 había 6 personas y pidieron una pizza grande.



En la mesa 3 había dos personas y pidieron una pizza chica.



En cada mesa se repartieron la pizza en partes iguales.

a) ¿En qué mesa le tocó más pizza a cada persona? En la 3

b) ¿Qué cantidad de pizza le tocó a cada persona en cada mesa?

Mesa 1: 113 cm²

Mesa 2: 118 cm²

Mesa 3: 157 cm²

2 Los costos de las pizzas son:

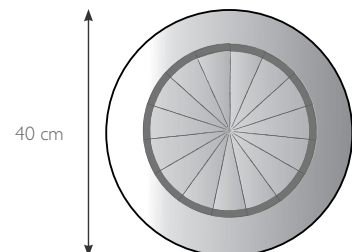
Pizza	Costo
Chica	\$ 49
Mediana	\$ 69
Grande	\$ 89

a) ¿En qué tipo de pizza sale más caro el centímetro cuadrado de pizza? En la chica

b) ¿Cómo lo averiguaste? Dividiendo el costo entre el área de la pizza

3 Platiquen ante su grupo cómo resolvieron estos problemas.

4 La pizza grande se coloca en un plato con la medida que se indica, ¿qué parte del plato queda sin cubrir por la pizza? 550 cm²



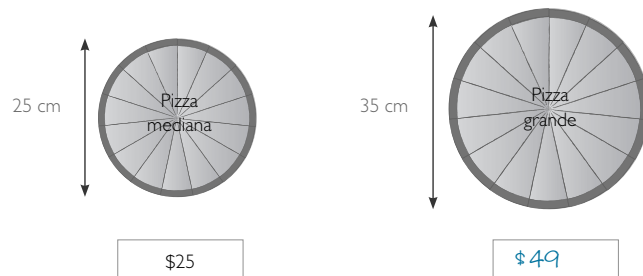
Escribe tu procedimiento.

Parte sin cubrir = área del plato – área de la pizza

$$= \pi \times \left(\frac{40}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{30}{2}\right)^2$$

$$= \pi \times (400 - 225) = 550 \text{ cm}^2$$

5 En otra pizzería venden pizzas de los siguientes dos tamaños:



El dueño quiere que el costo de las pizzas sea proporcional a su área. Anota en el recuadro el precio de la pizza grande.

6 Platica con tus compañeros y compañeras cómo resolvieron los problemas 4 y 5.

$$\left(\frac{\text{Área de pizza mediana}}{\$25} \right) \left(\frac{\text{Área de pizza grande}}{x} \right)$$

Otros recursos

Le sugerimos recomendar a los estudiantes la siguiente página de Internet, en la que encontrarán más propiedades interesantes del círculo, de forma muy accesible:

<http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/area7.htm>

Sugerencias didácticas

Es importante que el maestro diferencie cuándo una actividad consiste en la resolución de un problema. Para ello debe tener presente que, a partir de los datos del problema, quiere obtenerse una información que no es consecuencia inmediata de éstos.

Estas informaciones pueden proporcionarse a través de enunciados, documentos, situaciones y experiencias, o de la construcción de algún objeto (en este caso, del círculo). Estas actividades deben llevar al estudiante a efectuar descubrimientos propios y no sólo a aquello que queremos que aprenda. Es por ello necesario estimular en él un espíritu de búsqueda que lo ayude a desarrollar la intuición matemática, esta lección se puede aprovechar muy bien para este fin.

Se sugiere al maestro presentar el siguiente problema en adición a los sugeridos en el libro: un artesano compró varias piezas, en una está realizando los cortes para las bases de un cubilete de cacho, que se sabe tienen forma circular. El radio de cada pieza es de 3 cm y el tamaño de la pieza es aproximadamente de 1 metro por 80 cm y su valor es de 30 mil pesos.

¿Cómo sería recomendable disponer las bases circulares de manera que se aproveche al máximo la pieza de cuero? Hacen un dibujo esquemático de la distribución y explican por qué es la forma en la cual se aprovecha mejor la pieza. ¿Cuántas bases circulares alcanza a obtener con ella?

¿Cuánto cuero se pierde de la pieza completa? ¿Aproximadamente a cuánto dinero equivale esta pérdida en dicha pieza de cuero?

Lección 91 Circulando

¿Sabías que una rueda se puede usar para medir distancias?

1 Una bicicleta tiene ruedas de 60 cm de diámetro.

- a) ¿Cuántos metros recorre cuando las ruedas dan una vuelta completa? 1.884 m
- b) Anota los valores que faltan en la tabla.
- c) En el último renglón escribe la expresión que relaciona el número de vueltas (y) con la distancia recorrida (x).

Número de vueltas de la rueda (x)	Distancia recorrida en metros (y)
2	3.77
3.5	6.59
4	7.54
5	9.42
10	18.84
35	65.94
100	188.40
$y = 1.884x$	

- d) Haz la gráfica correspondiente en papel milimétrico.

- e) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad?

Sí. ¿Cómo lo sabes? _____

Por que $y = Cx$, donde C es una constante

2 Un automóvil tiene llantas con un radio de 0.29 m.

- a) Cuando el automóvil recorre 10 km, ¿cuántas vueltas han dado sus llantas? 5490 vueltas
- b) ¿Cuántos kilómetros avanza este auto cuando sus llantas dan 1 000 vueltas completas?

1.821 km

3 Las ruedas también pueden ser un instrumento para medir longitudes. A una rueda de madera se le sujeta un palo en su centro, de tal manera que la rueda pueda girar al deslizarla por una superficie. La rueda tiene una marca para saber cuándo ha dado una vuelta completa.

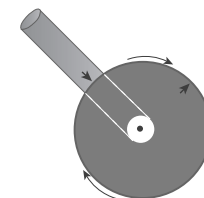
- a) Para que una rueda avance un metro cada vez que da una vuelta completa, ¿cuánto debe medir

su radio? 15.9 cm

- b) ¿Y para que avance 1.5 metros? 23.9

- c) Se midió la distancia entre dos árboles con una rueda de 32 cm de radio. La rueda dio 8 vueltas. ¿Qué distancia hay entre los dos

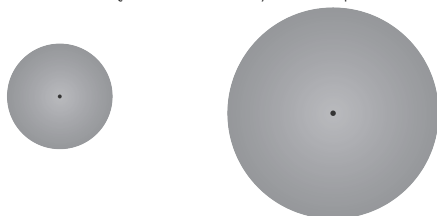
árboles? 16.08



4 Comenta con tus compañeros y compañeras la manera en que resolvieron estos problemas y los resultados a los que llegaron.

5 Realiza lo siguiente:

- a) Mide los diámetros de los círculos. Observa que el diámetro del círculo grande mide el doble que el del círculo pequeño.
 b) ¿Cuántas veces mayor crees que será el perímetro del círculo grande en comparación con el del pequeño? 2 ¿Cuántas veces mayor crees que será el área? 4



- c) Calcula el perímetro y el área de cada círculo y después anota tu conclusión:

Círculo grande

$$A_1 = 12.56 \text{ cm}^2$$

$$P_1 = 12.56 \text{ cm}$$

Círculo pequeño

$$A_2 = 3.14 \text{ cm}^2$$

$$P_2 = 6.28 \text{ cm}$$

Conclusión: Cuando el diámetro de un círculo aumenta al doble, ¿su perímetro aumenta al doble? Sí ¿Su área aumenta al doble? No

6 Anota los valores que hacen falta en las siguientes tablas. Usa tu calculadora:

Radio (cm)	1	2	4	8	10
Perímetro	6.28 cm	12.56 cm	25.12 cm	50.24 cm	62.8 cm

Radio (cm)	1	2	4	8	10
Área	3.14 cm ²	12.56 cm ²	50.24 cm ²	200.96 cm ²	314 cm ²

- a) Para cada tabla elabora la gráfica correspondiente en papel milimétrico.
 b) ¿El perímetro de un círculo es proporcional a su radio? Sí
 ¿Cómo lo sabes? Porque la fórmula es $P = 2\pi \times r$
 c) ¿El área de un círculo es proporcional a su radio? No
 ¿Cómo lo sabes? Porque el área no aumenta proporcionalmente a la medida del radio

7 Para barnizar una tabla cuadrada de un metro de lado, se usó $\frac{3}{4}$ de litro de barniz.

¿Para barnizar de igual manera una mesa circular de un metro de diámetro, se usará más de $\frac{3}{4}$ de litro o menos? Menos ¿Cómo lo sabes? Un círculo de ese diámetro tiene menor área que un cuadrado de 1 m de lado
 ¿Qué cantidad de barniz se usará para barnizar la mesa circular? 0.589 litros

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas que impliquen el cálculo del perímetro de una circunferencia.
- Resuelve problemas que impliquen el cálculo del área de una circunferencia.

Otros recursos

Puede recomendar a sus estudiantes la siguiente página de Internet, para verificar las fórmulas de perímetro y área del círculo, así como su justificación:

<http://www.escolar.com/geometr/04circycir.htm>

Sugerencias didácticas

Mientras los alumnos resuelven un problema, el maestro podrá conocer y evaluar los procedimientos y las herramientas matemáticas que utilizan, con el fin de favorecer su fortalecimiento y evolución.

Además de los problemas de esta sección, el maestro puede aprovechar situaciones de la vida real en las cuales los alumnos, por iniciativa propia u orientados por el maestro, indaguen todo lo que sea posible con los datos que ésta ofrece.

Se presentan una serie de ejercicios para repasar lo aprendido, se sugiere al maestro que aproveche esta sección para evaluar el aprendizaje del estudiante y detectar aquellos temas en los cuales es necesario seguir trabajando, a fin de que cada una de las lecciones del bloque sea asimilada y comprendida.

Valoración del desempeño

- Resuelve los ejercicios de repaso de las lecciones vistas en el cuarto bloque.

Repasemos lo aprendido

El uso de literales para expresar medidas constituyó un gran avance en el desarrollo de la matemática

I Subraya la respuesta correcta

- 1 En las estadísticas de cierta temporada, el equipo Los halcones llevaba 5 goles a favor y 8 en contra. ¿Cuál número expresa mejor la diferencia de goles?

a) 3 b) -3 c) 13 d) -13

- 2 Una empresa registró en un mes ganancias por \$500 000 y pérdidas por \$600 000. ¿Cuál número expresa mejor el balance de esa empresa?

a) -\$100 000 b) -\$1100 000 c) \$100 000 d) \$1100 000

- 3 Don Luis quiere hacer un corral para sus animales, le gustaría que fuera en forma cuadrada y de 49m^2 de área. ¿Cuánto debe medir el lado del corral?

a) 2 401 m b) $2\,401\text{ m}^2$ c) 7 m d) 7 m^2

- 4 La siguiente es una tabla de precios de una papelería en donde sacan copias fotostáticas.

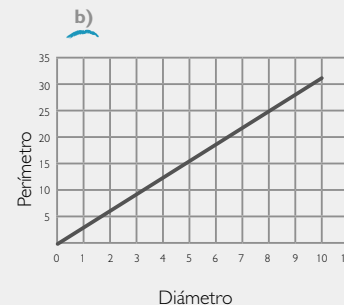
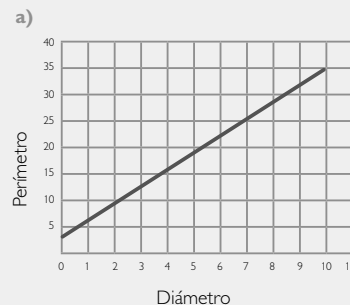
Número de copias	Costo (\$)
1	0.40
2	0.80
3	1.20
4	1.60
5	2.00

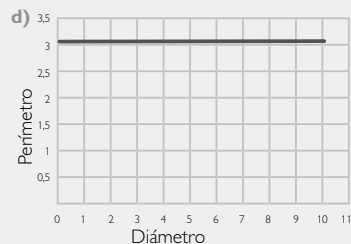
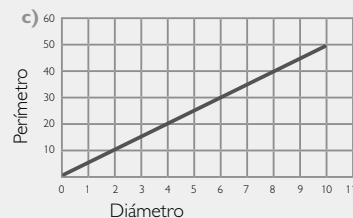
Si consideramos x al número de copias y y al costo, ¿cuál expresión corresponde a la tabla?

a) $y = 0.40x$ b) $x = 0.40y$ c) $y = 0.40 + x$ d) $y = \frac{x}{0.40}$

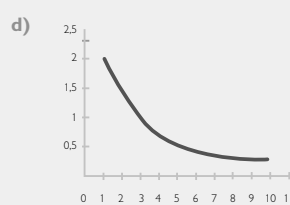
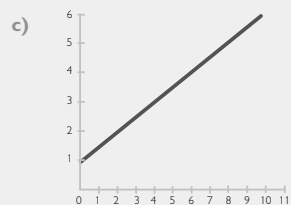
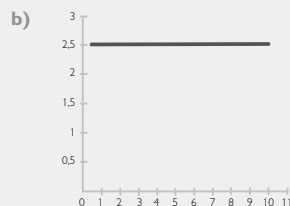
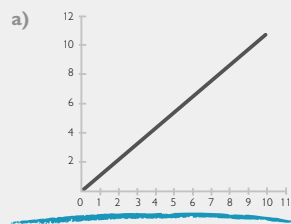
- 5 Para calcular el perímetro de un círculo se usa la fórmula $P = 3.14d$, donde P es el perímetro y d el diámetro.

¿Cuál gráfica corresponde a esta expresión?





6 ¿Cuál de las siguientes es una gráfica de relación proporcional directa?

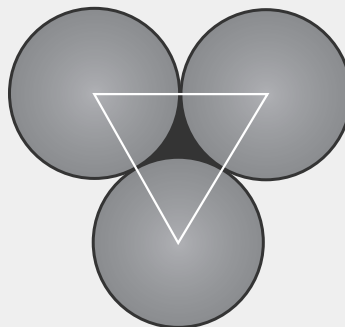


7 Considera que la altura del triángulo equilátero mide 1.7 cm y los vértices del triángulo coinciden con los centros de los tres círculos. El radio de los círculos mide 1 cm. Calcula el perímetro y el área de la parte negra.

Perímetro: 3.4 cm

Área: 0.13 cm²

8 Reproduce la figura en tu cuaderno de manera que el triángulo mida 6 cm de lado.



Otros recursos

Se sugiere al profesor el siguiente texto, como apoyo para reforzar la enseñanza de los temas vistos en este bloque:

Jesús Alarcón, Elisa Bonilla, et al.. *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: SEP, 2001.

Sugerencias didácticas

En esta sección se muestran teselaciones muy famosas realizadas por M.C. Escher. Considerando a los teselados del plano como un disparador creativo que contribuye al diseño de formas modulares, se desarrolla un procedimiento para agrupar formas de uso arquitectónico. Existen diseños que teselan aperiódicamente, admitiendo el cubrimiento del plano sin utilizar un patrón de repetición a distancias constantes.

Se analizan los procedimientos y reglas para su generación geométrica y su fractalización. Se propone una técnica para generar teselados bidimensionales.

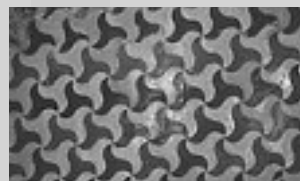
Valoración del desempeño

- Conoce y reproduce una teselación.

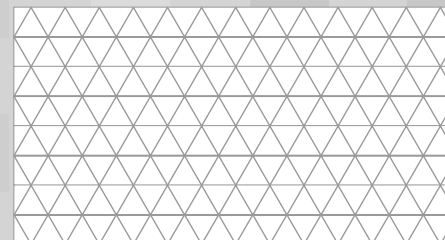
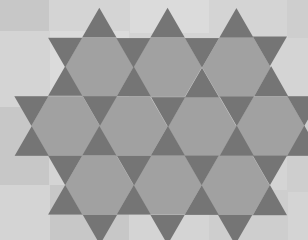
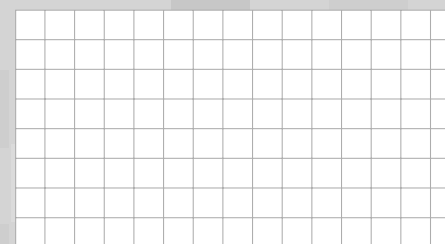
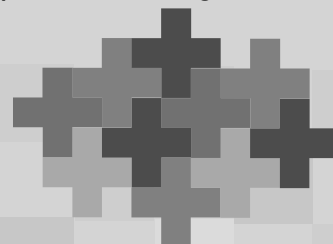
Las matemáticas en los mosaicos

Probablemente has observado, en tu casa o en la calle, losetas o mosaicos formados por figuras geométricas. Además de ser bellos y simétricos, ¡se bonan muy bien!

Estos diseños se llaman teselados: son figuras geométricas que por sí mismas o en combinación cubren una superficie plana, sin dejar huecos ni superponerse.



Copia a la derecha los siguientes teselados.

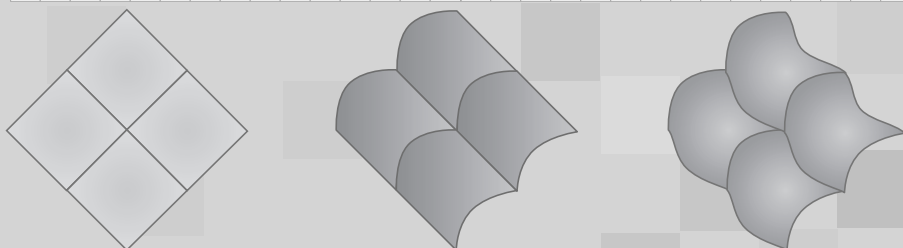
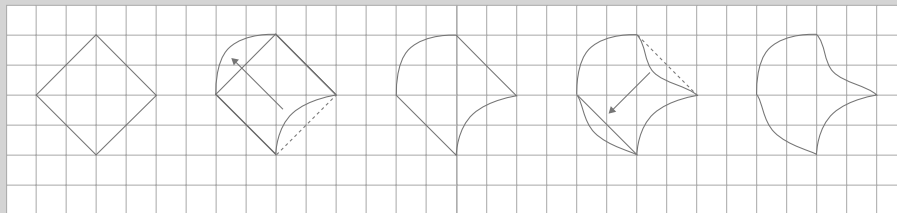


Si fueras fabricante de mosaicos y tuvieras que diseñar alguno para cubrir un piso, ¿cuál de las siguientes formas escogerías si el cliente quiere usar un solo tipo de azulejo? ¿Por qué crees que es la mejor forma para un mosaico?



El hexágono, porque forma un teselado

A continuación se muestra cómo puede obtenerse un teselado al hacer variaciones a un diseño básico simple. Usa tu imaginación y haz uno en la cuadrícula de abajo.



Las antiguas civilizaciones utilizaban, cerca del año 400 a. n. e., mosaicos para la construcción de sus casas y templos. A los mosaicos también se les llama *teselados*.

La palabra *teselado* proviene de *tessellae*, que era el nombre que los romanos daban a los pequeños azulejos usados en el pavimento.

Otros recursos

Se sugiere al maestro pida al estudiante acceder a la siguiente dirección, donde encontrará la historia, juegos y obras del famoso artista que realizó las teselaciones más famosas del mundo, M. C. Escher:

[http:// www.uv.es/~buso/escher/escher.html](http://www.uv.es/~buso/escher/escher.html)

Sugerencias didácticas

Se sugiere al maestro pida a los estudiantes realizar las actividades propuestas en esta página, ya que la mayoría de ellos, seguramente se encuentran familiarizados con los teléfonos celulares.

Es pertinente que el profesor siga las siguientes recomendaciones al realizar esta actividad:

Al presentar o redactar un problema es importante que el maestro, además de definir el propósito que persigue, procure que el problema cumpla con determinadas condiciones:

- Que responda a una necesidad o interés del alumno.
- Que favorezca la búsqueda de estrategias para resolverlo.
- Que su solución incluya los conceptos matemáticos que se quieren estudiar.
- Que pueda expresarse en algún tipo de lenguaje (aritmético, geométrico, gráfico, etcétera) y si es posible se traduzca de uno a otro.
- Que su grado de dificultad no sea tan alto como para desanimar a los alumnos, ni tan bajo como para que sólo repitan lo que ya saben.

Valoración del desempeño

- Analiza un problema para determinar una solución óptima.
- Trabaja en equipo.
- Registra los datos obtenidos al resolver un problema.

Otros recursos

Sugiera a sus alumnos consultar la página de la Profeco para calcular el gasto en el celular:

http://www.profeco.gob.mx/encuesta/brujula/bc_gasto_celular.xls

Y para terminar... ¡Investiguemos!

¿Qué plan conviene contratar?

Los planes que ofrecen las compañías de teléfonos celulares no siempre son claros, por ello puede ser difícil saber cuál conviene contratar.

En esta investigación ustedes explorarán este problema e intentarán dar algunas recomendaciones para algunos casos.

La pregunta que guía la investigación es ésta: ¿Qué plan le conviene contratar a una persona?

Dado que el mejor plan podría depender del uso que se pretenda dar al teléfono, es necesario considerar lo siguiente.

- 1) varios planes posibles y
- 2) varios tipos de usuario

Tarea 1: Organicen para averiguar los planes que ofrecen una o dos empresas de teléfonos.

Tarea 2: Cada uno pregunte, al menos a dos personas que usen teléfono celular, cuántos minutos al mes utilizan su teléfono (o cuántas llamadas, como de cuántos minutos), en qué horarios son las llamadas y si son a teléfonos fijos o a otros teléfonos celulares. Consideren únicamente llamadas locales.

Organicen la información que trajo todo el grupo; por ejemplo, hagan una primera clasificación de los usuarios en tres grupos, en función del tiempo que usan el teléfono.

Definan tres tipos de usuario del teléfono celular: uno que lo use muy poco, uno que lo use regular y uno que lo use mucho.

Analicen algunos de los planes que consiguieron. Para ello, hagan las tablas y las gráficas que les puedan ayudar. Saquen algunas conclusiones como las siguientes:

A una persona que hace tantas llamadas al mes en horario pico le podría convenir más el plan tal que el plan tal...



La recopilación de datos estadísticos se ha hecho desde los comienzos de la civilización. Hacia el año 3000 a.n.e., los babilonios recopilaban, en tablillas de arcilla, datos sobre la producción agrícola. Los egipcios estudiaban datos de la población incluso antes de construir las pirámides. En nuestros días, la recopilación de datos estadísticos ayuda a estudiar fenómenos naturales, sociales, económicos, políticos, biológicos, entre muchos otros. Para interpretar estos datos, se utilizan medidas como el promedio y la mediana. Por ejemplo, según datos del INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática), en 2005, la población de 15 años o más ha aprobado ocho grados de escolaridad en promedio.

BLOQUE V



En este bloque estudiarás:

- los algoritmos de adición y sustracción de números con signo;
- las distintas representaciones de una relación entre cantidades: tabla de datos, expresión algebraica, gráfica, así como los vínculos que guardan estas representaciones entre sí;
- problemas que impliquen el cálculo de áreas de diversas figuras;
- las condiciones para que un juego de azar sea justo;
- las relaciones de proporcionalidad inversa;
- las medidas de tendencia central y cómo se usan para comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos.

Sugerencias didácticas

Se le sugiere que en la entrada del bloque presente al estudiante los temas que se abordarán.

Este bloque aborda de manera importante la parte de las matemáticas dedicada a la probabilidad y la estadística. Se recomienda al docente que un estudiante lea en voz alta la introducción del bloque y que todo el grupo aporte ideas de por qué creen que es importante la probabilidad y la estadística, y cómo influye en la organización del mundo actual.

Valoración del desempeño

- Presentar los temas que se verán a lo largo de este bloque.

Otros recursos

Para apoyar su praxis en relación con el enfoque de la asignatura, le sugerimos leer:

Luis Miguel García y María Luisa Pérez, *Nuestros problemas favoritos (15 años de la OMM)*, Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2001.

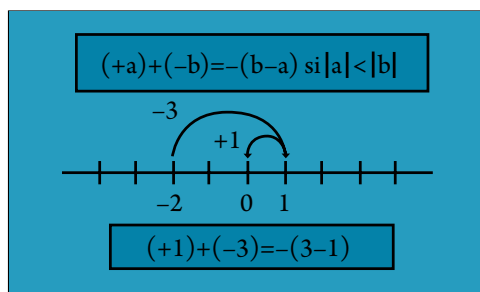
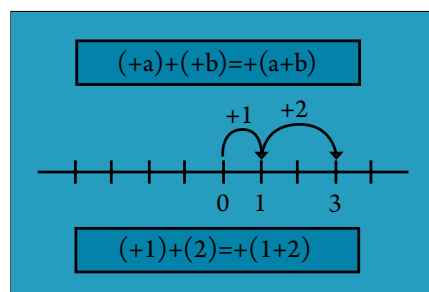
José Antonio Gómez (editor), *Seis años de éxito. Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*, Academia de la Investigación Científica SITESA, 1993.

Sugerencias didácticas

La suma de dos números enteros de distinto signo es otro número entero, cuyo valor absoluto es igual a la diferencia entre los valores absolutos de los sumandos y cuyo signo es el del sumando de mayor valor absoluto; como caso particular se presenta la suma de dos números enteros opuestos, cuyo resultado es igual a cero.

Sumar un número entero positivo significa desplazarse hacia la derecha en la recta numérica, y sumar un número entero negativo significa desplazarse hacia la izquierda en la recta numérica.

Ejemplo:



Lección 92 Pérdidas y ganancias

Gané 2 y perdí 5. A final de cuentas, ¿cómo quedé? Saber sumar números positivos y negativos permite resolver nuevos problemas.

- 1** La tabla contiene un registro incompleto de las canicas que Mario ganó y perdió en varios partidos. Las canicas que ganó se indican con números positivos y las que perdió, con negativos. Escribe lo que falta.

Gané 8	Perdí 9	Perdí	Gané	Gané	Perdí 1	Perdí 2	Gané 6	No Gané ni perdí
+8	-9	-5	+4	+5	-1	-2	+6	0

- 2** Mario juega series de dos partidos. La siguiente tabla muestra lo que pasó en cada partido y el resultado final. También indica la operación que permite obtener el resultado final.

a) Anota los datos que faltan.

Primer partido	Segundo partido	Resultado final	Operación
Gané 15	Gané 28	Gané 43	$(+15) + (+28) = 43$
Gané 15	Perdí 28	Perdí 13	$(+15) + (-28) = -13$
Perdí 35	Gané 13	Perdí 22	$(-35) + (+13) = -22$
Perdí 18	Perdí 14	Perdí 32	$(-18) + (-14) = -32$
Gané 27	Perdí 25	Gané 2	$(+27) + (-25) = +2$
Perdí 32	Gané 25	Perdí 7	$(-32) + (+25) = -7$
Perdí 27	Gané 14	Perdí 3	$(-17) + (+14) = -3$

b) Resuelve:

$$\begin{aligned}
 (+3) + (+10) &= 13 & (-3) + (+10) &= 7 & (-3) + (-10) &= -13 & (+3) + (-10) &= -7 \\
 (+1) + (-5) &= -4 & (-1) + (+5) &= 4 & (-1) + (-5) &= -6 & (+1) + (-5) &= -4
 \end{aligned}$$

c) Comparen con ayuda de su profesora o profesor los resultados; si hay diferencias, averigüen en qué se equivocaron y corrijan.

- 3** Lee la siguiente técnica para sumar números con signo, con el apoyo de la recta numérica. Utiliza la técnica para resolver las sumas que aparecen después.

Para sumar $+5 + (-7)$:

Paso 1: Se ubica el primer sumando en la recta numérica.



Paso 2: Si el segundo sumando es positivo, se cuentan hacia la derecha las unidades que indica el segundo sumando y se llega al resultado. Si el segundo sumando es negativo, se cuenta hacia la izquierda.



Así, $+5 + (-7) = -2$

a) Resuelve.

$$\begin{array}{llll} (+2) + (+8) = 10 & (-2) + (+8) = 6 & (-2) + (-8) = -10 & (+2) + (-8) = -6 \\ (+5) + (+10) = 15 & (-5) + (+10) = 5 & (-5) + (-10) = -15 & (+5) + (-10) = -5 \end{array}$$

En la expresión $(-2) + (+8)$, el primer signo "+" indica que se trata de la operación adición.

En cambio, el segundo signo "+", el de "+8", indica que se trata de un número positivo.

Los números positivos pueden representarse también sin el signo "+". Por lo tanto,

- $(-2) + (+8)$ es equivalente a $-2 + 8$
- $(-2) - (+8)$ es equivalente a $-2 - 8$
- $(+2) + (+8)$ es equivalente a $2 + 8$

b) Resuelve.

$$\begin{array}{llll} 4 + (-3) = 1 & -4 + 3 = -1 & (-4) + (-3) = -7 & 4 + 3 = 7 \\ 5 + (-7) = -2 & (-5) + (-7) = -12 & 5 + 7 = 12 & -5 + 7 = 2 \end{array}$$

4 Compara los resultados de las operaciones con los del resto del grupo.

5 Lee la información y completa la tabla.

Recuerda. El opuesto de un número n tiene el mismo valor absoluto que el número n , pero distinto signo.

El opuesto de -3 es $+3$. El opuesto de $+3$ es -3

Número	5	-8	-3	2	4
Opuesto del número	-5	8	3	-2	-4
Suma del número y de su opuesto	0	0	0	0	0

a) ¿Cuál es el resultado de sumar un número y su opuesto? Cero

b) ¿Qué número sumado a -5 da 0? 5 c) ¿Cuál es el opuesto de -5 ? 5

Observa que la suma de un número con su opuesto es igual a 0. $(-3) + (+3) = 0$

Valoración del desempeño

– Suma números con signo.

Otros recursos

Como apoyo al tema de los números con signo, le sugerimos consultar el libro del maestro publicado por la Secretaría de Educación Pública sobre didáctica de las matemáticas en:

<http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/pdf/orientaciones/libromaestro.pdf>

Sugerencias didácticas

Se propone al profesor que presente al estudiante la siguiente secuencia de pasos para realizar sumas de números con signo:

1. Cuando los números enteros tienen el mismo signo, se suman, y el resultado queda con el mismo signo de los números que fueron sumados.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & 8 = 17 \\ \text{positivos} & & & & \text{positivo} & & \\ -1 & - & 3 & - & 5 & - & 8 = -17 \\ \text{negativos} & & & & \text{negativo} & & \end{array}$$

2. Cuando los números tienen distinto signo, se resta el menor (en valor absoluto) al mayor (en valor absoluto), y el resultado lleva el signo del mayor (en valor absoluto).

Ejemplo: $-5 + 3 = -2$ El resultado es negativo, porque $|-5| > |3|$ y -5 tiene signo negativo.
 $5 + (-3) = 2$ El resultado es positivo, porque $|5| > |-3|$ y 5 tiene signo positivo.

Recuerde al estudiante la noción de valor absoluto. Los números $+3$ y -3 se encuentran a la misma distancia del cero. Ocurre así porque los dos números están formados por el mismo número natural, el 3, aunque con distinto signo. Al número 3 se le llama valor absoluto de $+3$ y -3 , y se indica así: $|+3| = |-3| = 3$. El valor absoluto de un número entero es el número natural que sigue al signo y se indica poniendo el número entero entre barras.

Se sugiere hacerr énfasis en el hecho de que el valor absoluto es una distancia, y como todas las distancias, es siempre positivo.

Lección 93 La suma de números con signo

Si a 5 le sumo un número, ¿puede suceder que el resultado sea menor que 5?

1 Haz lo siguiente.

- a) Compara las parejas de números escribiendo mayor que o menor que. Antes, recuerda:

- $|a|$ significa **valor absoluto** del número a , es decir, indica su distancia al cero. Los valores absolutos siempre son positivos o cero.
- Entre más a la derecha está un número en la recta numérica, mayor es.

-25 <u>es menor que</u> 3	-5 <u>es menor que</u> -3
$ -25 $ <u>es menor que</u> $ 3 $	$ -5 $ <u>es mayor que</u> $ -3 $
$ 7 $ <u>es igual a</u> 7	-12 <u>es menor que</u> -9
$ 17 $ <u>es mayor que</u> $ 7 $	$ -12 $ <u>es mayor que</u> $ -9 $

Nota que -25 es menor que el número 3, pero tiene un valor absoluto mayor.

- b) Revisa tus respuestas con tus compañeros y compañeras.

2 Con apoyo en la recta numérica, resuelve las siguientes sumas.



- | | | | |
|-----------------|----------------------|-----------------|--------------------|
| a) $2 + 5 = 7$ | d) $-2 + (-5) = -7$ | g) $-2 + 5 = 3$ | j) $2 + (-5) = -3$ |
| b) $5 + 5 = 10$ | e) $-5 + (-5) = -10$ | h) $-5 + 5 = 0$ | k) $5 + (-5) = 0$ |
| c) $3 + 7 = 10$ | f) $-3 + (-7) = -10$ | i) $-3 + 7 = 4$ | l) $3 + (-7) = -4$ |

3 Reúnete con un compañero o compañera y realicen lo siguiente.

- a) Comparen sus resultados y corrijan los errores.
- b) Observen que en las dos primeras columnas los sumandos tienen el mismo signo y en las dos últimas los sumandos tienen signos diferentes.
- c) A partir de los resultados de las sumas, escriban una técnica que permita sumar números con signos positivos y negativos. Anoten la técnica en su cuaderno.

Si ambos términos tienen signo igual, se suman y se conserva el mismo signo, si tienen signos distintos, se le resta el menor al mayor y se conserva el signo del término con el valor absoluto mayor.

© ediciones sm

4 Con ayuda de tu profesor o profesora y la participación de tus compañeras y compañeros hagan lo siguiente:

- a) Comenten algunas de las técnicas para sumar números con signo.
- b) Lean la siguiente técnica para sumar números con signo. Observen si se parece a algunas de las que ustedes propusieron.

Caso 1. Los dos sumandos tienen el mismo signo, por ejemplo, $-2 + (-5)$.

- El valor absoluto del resultado es igual a la suma de los valores absolutos de los sumandos: $|-2| + |-5| = 2 + 5 = 7$.
- El signo del resultado es el mismo que el de los sumandos, es decir, en el ejemplo, negativo.
- Entonces, $-2 + (-5) = -7$

Caso 2. Los sumandos tienen signos diferentes, por ejemplo, $(+2) + (-5)$.

- El valor absoluto del resultado es igual a la diferencia entre los valores absolutos: $|-5| - |+2| = 5 - 2 = 3$.
- El signo del resultado es el mismo que el que tiene el sumando de mayor valor absoluto, es decir, en el ejemplo, el signo de -5 , negativo.
- Entonces, $2 + (-5) = -3$.

5 Aplica la técnica anterior para resolver las siguientes sumas.

a) $15 + 23 = 38$	d) $-2.5 + 3.2 = 0.7$	g) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	j) $-5 + (-5) = -10$
b) $-15 + (-23) = -38$	e) $-2.5 + (-3.2) = -5.7$	h) $\frac{1}{2} + (-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{4}$	k) $5 + 5 = 10$
c) $-15 + 23 = 8$	f) $2.5 + (-3.2) = -0.7$	i) $-\frac{1}{2} + (-\frac{3}{4}) = -1\frac{1}{4}$	l) $-5 + 5 = 0$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones con el procedimiento que tú quieras.

a) $5 + x = 7$ $x = 2$	d) $12 + x = 0$ $x = -12$	g) $237.5 + x = 100$ $x = -137.5$
b) $5 + x = 2$ $x = -3$	e) $-12 + x = 0$ $x = 12$	h) $45.6 + x = 60.7$ $x = 15.1$
c) $-5 + x = -2$ $x = 3$	f) $-5 + x = 0$ $x = 5$	i) $25.2 + x = 26$ $x = 0.8$

7 Con ayuda de tu profesor o profesora, compara tus resultados con los del grupo. Si es necesario, utilicen una recta numérica para apoyar sus razonamientos. Comenten lo siguiente.

En el conjunto de los números positivos y el cero, la ecuación $5 + x = 0$ no tiene solución. Pero, si se añaden los números negativos, la ecuación sí tiene una solución; ésta es -5 .

Valoración del desempeño

- Determina el valor absoluto de un número entero.
- Sabe cuál es el número opuesto de un entero.
- Suma números con signo.

Otros recursos

Le sugerimos recomendar a los estudiantes la siguiente página de Internet, donde encontrará ejercicios interactivos de valor absoluto: http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/unid-3/valor_absoluto.htm

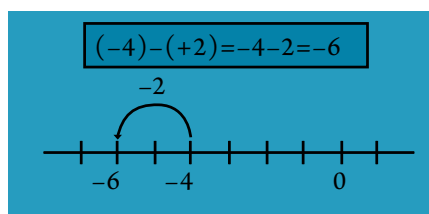
Sugerencias didácticas

El estudiante está acostumbrado a que un número se puede restar a otro sólo si éste es mayor que el primero; en esta lección el alumno verá que es posible realizar una resta aun cuando el sustraendo sea mayor que el minuendo; es decir, que una resta se puede realizar con cualquier par de números con signo.

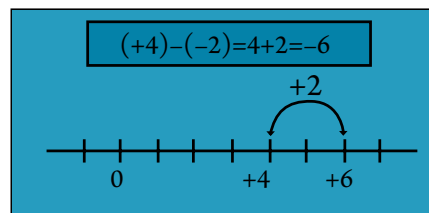
El estudiante debe observar que restar números con signo es equivalente a sumar a un número el opuesto de otro, por ejemplo:

$$5 - 3 = 5 + (-3)$$

Restar un número entero positivo significa desplazarse hacia la izquierda en la recta numérica.



Restar un número entero negativo significa desplazarse hacia la derecha en la recta numérica.



Lección 94 La resta de números con signo

¿Se puede restar un número grande de un número pequeño? ¿El resultado de una resta puede ser mayor que el minuendo?



- 1 Usa la calculadora para verificar si las siguientes restas son correctas, pero no uses la tecla de la resta.**

Resta	¿Es correcta?	Resta	¿Es correcta?
$2\,231 - 975 = 1\,356$	No	$5\,420 - 856 = 4\,564$	No
$3\,800 - 1\,097 = 2\,703$	Sí	$4\,075 - 786 = 3\,209$	Sí

Probablemente usaste la siguiente propiedad: En una resta, si se suma la diferencia (o resultado), con el sustraendo, se obtiene el minuendo.

minuendo - sustraendo = diferencia	diferencia + sustraendo = minuendo
$20 - 15 = 5$	$5 + 15 = 20$



- 2 Ahora, con tu grupo y con la ayuda de tu profesor o profesora, lean la técnica que se propone para resolver la resta $(+8) - (-3)$, usando la propiedad anterior. Después, repitan la técnica con una o dos restas más.**

I. Primer paso: llamar x a la diferencia buscada.

$$(+8) - (-3) = x$$

Minuendo - Sustraendo = Diferencia

II. Segundo paso: aplicar la propiedad anterior:

$$x + (-3) = (+8)$$

Diferencia + Sustraendo = Minuendo

III. Tercer paso: buscar el valor de x , con apoyo en la recta numérica. ¿Qué número sumado a (-3) da $(+8)$?



Es decir,
¡Restar $(+8) - (-3)$ equivale a buscar el número que sumado a (-3) da $(+8)$!

En la expresión $(+8) - (-3)$, el primer signo $-$ indica que se trata de la operación sustracción. En cambio, el segundo signo $-$, el de -3 , indica que se trata de un número negativo.



- 3 Reúnete con un compañero o compañera y utilicen la técnica anterior para resolver las siguientes restas. Si lo desean, apóyense en una recta numérica.**

minuendo - sustraendo = diferencia	diferencia + sustraendo = minuendo	diferencia
$(-4) - (-5) = x$	$x + (-5) = (-4)$	$x = +1$
$(+9) - (+9) = x$	$x + (+9) = (+9)$	$x = 0$
$(+8) - (-2) = x$	$x + (-2) = (+8)$	$x = +10$
$(+15) - (-15) = x$	$x + (-15) = (+15)$	$x = +30$
$(-8) - (+7) = x$	$x + (+7) = (-8)$	$x = -15$
$(0) - (-9) = x$	$x + (-9) = 0$	$x = +9$
$5 - 2 = x$	$x + 2 = 5$	$x = 3$
$2 - 5 = x$	$x + 5 = 2$	$x = -3$
$-2 - 5 = x$	$x + 5 = -2$	$x = -7$
$-2 - (-5) = x$	$x + (-5) = -2$	$x = 3$

- 4 Resuelve los siguientes problemas.**

- a) Ana sacó 5 pesos de su alcancía el lunes, metió 8 pesos el martes, sacó tres pesos el miércoles, sacó 2 pesos el jueves y metió 1 peso el viernes. ¿Al final de la semana tiene más o menos dinero en la alcancía que al principio? Menos ¿Cuánto más o cuánto menos? 1 menos
- b) En una serie de juegos de canicas, Pepe perdió 3 canicas, luego ganó 2 y luego perdió 5. ¿Cómo quedó Pepe al final? Con 6 canicas menos que al inicio
- c) Mario jugó dos partidos. En el primero perdió tres canicas. No recuerda cómo le fue en el segundo, pero sabe que acabó ganando una canica. ¿Cómo le fue en el segundo partido? Ganó 4 canicas

- 5 Lee cada problema y colorea el recuadro que contenga la expresión que corresponde al resultado.**

- a) Doña Tere gastó a pesos por la mañana. Por la tarde gastó b pesos. Le quedaron c pesos. ¿Cuánto tenía por la mañana?

$(a + b) + c$

$c - (a + b)$

$(a - b) - c$

$(a + b) - c$

- b) La temperatura bajó a grados por la mañana y por la noche bajó b grados más. ¿Cuánto bajó en total?

$a - b$

$b - a$

$a + b$

- c) Mario debía a pesos. Si pagó b pesos el mes pasado y c pesos este mes, ¿cuánto debe aún?

$a + (b + c)$

$a - (b + c)$

$a + (b - c)$

$a - (b - c)$

Valoración del desempeño

- Resta números con signo.
- Representa una adición o una sustracción en la recta numérica.

Otros recursos

Se sugiere recomendar al estudiante acceder a la siguiente página de Internet, donde encontrará ejercicios interactivos sobre suma de números con signo:

http://www.aaamaticas.com/add65_x1.htm#section2

Sugerencias didácticas

Un cuadrado semimágico es un arreglo de números dispuestos en un cuadrado de m casillas de lado, de tal forma que la suma de los números sea la misma en cada fila y columna del cuadrado.

Un cuadrado mágico es un cuadrado semimágico en el que la suma de los números en las dos diagonales principales es igual a la suma de los números de cualquier hilera del cuadrado. En esta lección se presenta un ejemplo de resolución de problemas por medio de la suma y resta de números con signo mediante la construcción de algunos cuadrados mágicos.

El origen de los cuadrados mágicos nos es desconocido. Sabemos que fueron manejados por los chinos y los hindúes antes de nuestra era, pero ignoramos todo lo referente a su concepción.

La leyenda dice que en el año 2200 antes de nuestra era (a.n.e.), el emperador chino Shu vio el cuadrado mágico de 3×3 en el caparazón de una tortuga en el río Lo. Lamentablemente, en nuestros tiempos las fábricas de tortugas no utilizan estampados tan bonitos.

Lección 95 Juegos con números

Saber sumar y restar números positivos y negativos amplía las posibilidades de resolver problemas.

1 ¿Recuerdas los cuadrados mágicos? Se llaman así porque al sumar en forma horizontal, vertical o diagonal, siempre se obtiene el mismo resultado.

- a) Realiza las sumas horizontales, verticales y diagonales del siguiente cuadrado mágico y verifica que en todos los casos la suma es cero.

3	-4	1	Horizontales	Verticales	Diagonales
-2	0	2	$3 - 4 + 1 = 0$	$3 - 2 - 1 = 0$	$3 + 0 - 3 = 0$
-1	4	-3	$-2 + 0 + 2 = 0$	$-4 + 0 + 4 = 0$	$-1 + 0 + 1 = 0$
			$-1 + 4 - 3 = 0$	$1 + 2 - 3 = 0$	

- b) Primero completa el cuadrado mágico y después anota las sumas horizontales, verticales y diagonales. El resultado siempre debe ser -9. No se vale repetir números.

0	-7	-2	Horizontales	Verticales	Diagonales
-5	-3	-1	$0 - 7 - 2 = -9$	$0 - 5 - 4 = -9$	$0 - 3 - 6 = -9$
-4	1	-6	$-5 - 3 - 1 = -9$	$-7 - 3 + 1 = -9$	$-2 - 3 - 4 = -9$
			$-4 + 1 - 6 = -9$	$-2 - 1 - 6 = -9$	

Probablemente ya te diste cuenta de que para encontrar un número en el cuadrado mágico necesitas conocer otros dos números que estén en la misma línea, ya sea horizontal, vertical o inclinada. Por ejemplo, en una línea están los números -2 y -1; la suma de esos dos números con el número que falta debe ser -9:

$$-2 + -1 + \square = -9 \quad \text{es decir, } -3 + \square = -9$$

¿Qué número sumado a -3 da -9?



- c) Haz lo mismo que en el inciso anterior. En este caso la suma siempre debe ser 3.6.

4.6	-3.2	2.2	Horizontales	Verticales	Diagonales
-1.2	1.2	3.6	$4.6 - 3.2 + 2.2 = 3.6$	$4.6 - 1.2 + 0.2 = 3.6$	$4.6 + 1.2 - 2.2 = 3.6$
0.2	5.6	-2.2	$-1.2 + 1.2 + 3.6 = 3.6$	$-3.2 + 1.2 + 5.6 = 3.6$	$2.2 + 1.2 + 0.2 = 3.6$
			$0.2 + 5.6 - 2.2 = 3.6$	$2.2 + 3.6 - 2.2 = 3.6$	

d) Haz lo mismo que en el inciso anterior. En este caso la suma siempre debe ser $\frac{3}{2}$.

$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$

Horizontales

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} &= \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} + 0 + \frac{5}{4} &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Verticales

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + 0 &= \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Diagonales

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} &= \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$



2 Con tus compañeros y compañeras y con ayuda de tu profesor o profesora, hagan lo siguiente.

a) Verifiquen si para completar cada cuadrado todos utilizaron los mismos números. Ordenen los números de cada cuadrado de menor a mayor; deben ser nueve números y no se debe repetir ninguno.

Cuadrado 1: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ Cuadrado 2: $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$
Cuadrado 3: $-3, -2, -1, 2, 0, 1, 2, 3, 4$ Cuadrado 4: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$

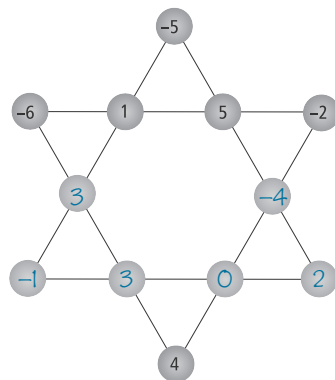
b) Comprueben que las ocho sumas de cada cuadrado dan el resultado que se estableció. Si hay errores, corrijánlos.

c) Inventen un cuadrado mágico siguiendo estas indicaciones:

- Escriban, de menor a mayor; nueve números consecutivos; de preferencia empiecen con un número negativo. $-4, -5, 0, 1, -3, -7, -6, -1, -2$
- Acomoden los nueve números en el cuadrado. El número que está en medio de la serie debe colocarse en la casilla central y la suma de tres números en línea debe ser igual al triple de este número.
- Verifiquen que las ocho sumas dan el mismo resultado.

3 En la siguiente estrella mágica haz lo siguiente:

- a) Anota los números que faltan de manera que la suma de cuatro números en línea siempre sea la misma. No se vale repetir números.
- b) Una vez que termines, compara tu estrella con las de otros compañeros para ver si coinciden.



5.1. Resolución de problemas mediante la suma y la resta de números con signo.

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas que implican suma y resta de números con signo.
- Resuelve y elabora cuadrados mágicos.

Otros recursos

En la siguiente página de Internet encontrará una guía para la elaboración de cuadrados mágicos, así como datos históricos y matemáticos sobre ellos:

http://www.geocities.com/cuadradomagicos/como_hacerlos.htm

<http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/lugares/mate2i.htm>

Sugerencias didácticas

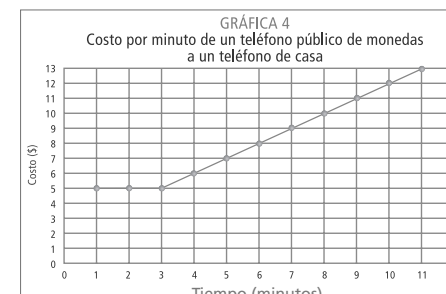
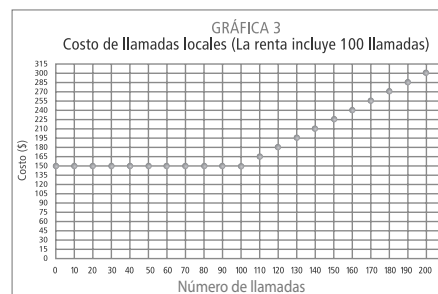
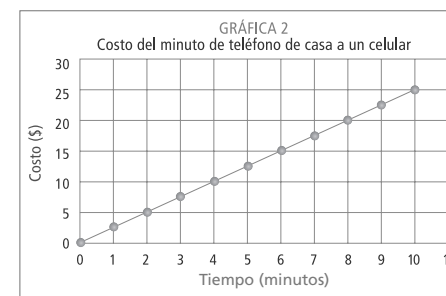
Es muy común en los cursos de secundaria, cuando se aborda la enseñanza de relaciones, proponer actividades en las que el estudiante debe tabular la expresión algebraica de una relación y construir la gráfica correspondiente marcando los puntos de los valores obtenidos. Sin embargo, no en todos los casos los estudiantes alcanzan a culminar con éxito la actividad, ni mucho menos tienen la oportunidad de realizar exploraciones que les permitan desarrollar algunas nociones acerca del concepto de relación. Esto se debe a diferentes factores. Por ejemplo, cuando un estudiante trata de tabular una expresión algebraica puede encontrar problemas si su bagaje aritmético no es el adecuado, y en consecuencia la construcción de la gráfica correspondiente resulta por demás imposible. Así que con este tipo de actividad tan común es muy difícil que el estudiante tenga la oportunidad de realizar exploraciones que le permitan desarrollar nociones acerca del concepto de relación. Por eso se sugiere que cuando el estudiante muestre dificultad para encontrar una regla de correspondencia, tabular una relación o graficarla, se detecte cuál es el problema, pues de esta forma, si se trata de una deficiencia aritmética (o algún otro obstáculo), puede buscar resolverla y continuar con la asimilación del concepto de relación.

Lección 96 Tarifas telefónicas

Las tarifas de teléfonos varían según la compañía y el tipo de servicio que dan. Hay tarifas para llamadas locales o de larga distancia, para teléfonos fijos o celulares, para teléfonos públicos de tarjeta o de monedas, entre otras.



1 Las siguientes gráficas muestran las tarifas de una compañía que ofrece diferentes servicios. Con base en la información de las gráficas responde las preguntas.



- a) ¿En qué gráfica se muestra una tarifa en la que el costo de la llamada no depende de los minutos que dure? En la 3
- b) De las gráficas en las que el costo depende de la duración de las llamadas, ¿en cuál cuesta lo mismo una llamada de 1 min que una de 3 min? En la 4

2 Busca en las gráficas los datos que faltan en las tablas y anótalos.

Celular a celular		Teléfono fijo a celular		Llamadas locales		Teléfono público	
Minutos	Costo (\$)	Minutos	Costo (\$)	Núm. de llamadas	Costo (\$)	Minutos	Costo (\$)
1	4	2	5	10	150	1	5
5	20	4	10	20	150	2	5
8	32	5	12.50	100	150	4	6
10	40	6	15.00	110	165	8	10

$$y = 4x$$

$$y = 2.5x$$

$$y = 150$$

$$y = 1.5x$$

$$y = 1.5x$$

$$y = 5$$

$$y = 3$$

$$y = x + 2$$

3 Contesta las preguntas y haz lo que se pide.

- a) En la tarifa de llamadas locales, lo que se paga por usar el teléfono **no es proporcional** al número de llamadas. Da al menos una prueba de ello. Mientras las llamadas aumentan entre 0 y 100, el valor permanece constante
- b) ¿En cuáles de las relaciones anteriores lo que se paga por el servicio telefónico sí es proporcional al número de minutos que se usa el teléfono? En las dos primeras
el valor de minutos es constante
costo
- c) Considera las dos relaciones que son de proporcionalidad. Representa con **x** el número de minutos y con **y** el costo. Escribe la regla de correspondencia de cada una y anótala en la parte inferior de la tabla correspondiente.

4 En grupo y con ayuda de tu profesor o profesora, realicen lo siguiente:

- a) Revisen las respuestas que encontraron en las actividades anteriores.
- b) Completen la siguiente información:

La gráfica 3 está formada por dos partes: una recta horizontal y una inclinada (están trazadas con color rojo).

Las abscisas (**x**) de los puntos de la recta horizontal van de 0 a 100. Las ordenadas (**y**) de todos esos puntos valen 150, es decir, no dependen del valor de **x**.

Entonces, para valores de **x** menores o iguales que 100, la regla de correspondencia de la relación es **y** = 150

Para valores de **x** mayores que 100, la regla de correspondencia de la relación es **y** = 1.5x

- c) Anoten las dos reglas de correspondencia de la relación entre número de minutos de llamadas de teléfono público y costo (gráfica 4):

Para valores de **x** menores o iguales que 3 min, **y** = 5

Para valores de **x** mayores que 3 min, **y** = x + 2

5.2. Cálculo de valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas). Relación entre las representaciones que corresponden a la misma situación. Identificación de relaciones de proporcionalidad directa.

Valoración del desempeño

- Calcula valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas).
- Relaciona las representaciones que corresponden a la misma situación.
- Identifica relaciones de proporcionalidad directa.

Otros recursos

Se sugiere leer el siguiente libro como apoyo para la enseñanza de las matemáticas:

K. C. Cole, *El universo y la taza de té. Las matemáticas de la verdad y la belleza*. Barcelona: Ediciones B, 1999.

Sugerencias didácticas

En esta lección se expone la manera en que se grafican funciones como la variación del tiempo, la distancia y la velocidad. Algunos problemas son fáciles de comprender por los alumnos, como los de velocidades y compraventa; los que pueden presentar cierta dificultad son los de inversiones, acertijo y geometría; y los más complejos suelen ser los de mezclas. Cuando la resolución de problemas de enunciado verbal es abordada en la forma tradicional, no es común que haya cambios en la actitud y motivación de los alumnos. Pero cuando se trabaja con ayuda de la computadora y en equipos, por lo general se aprecian avances positivos en su actitud y motivación. Es por esto que se recomienda que, de ser posible, organice al grupo para acceder a la computadora y ver cómo una función se puede tabular y graficar por este medio.

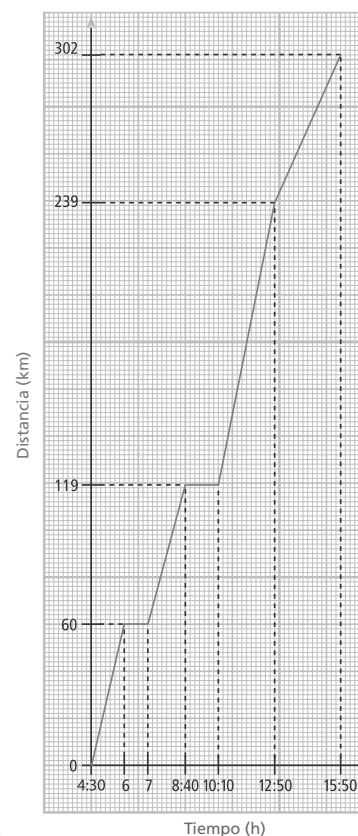
Los estudiantes mejorarán su capacidad de reflexión, conceptualización y comprensión de los problemas algebraicos verbales, puesto que habrá un mejor desempeño en la representación simbólica del enunciado verbal y en la resolución de las ecuaciones planteadas. Además, el alumno utilizará con más frecuencia la graficación como un método alternativo eficaz, el cual a su vez contribuye a la visualización y validación de la resolución del problema.

Lección 97 Tiempo, distancia y velocidad

¿En qué tramo el vehículo iba más aprisa? ¿En qué punto exacto rebasó a otro vehículo? son algunas de las preguntas que se pueden contestar a partir de la gráfica de una relación entre distancia y tiempo.

1 La gráfica 1 corresponde al recorrido de un tráiler, del Distrito Federal a la Ciudad de Morelia.

GRÁFICA 1



En la bitácora del viaje, es decir, en el informe que el chofer presenta a la empresa sobre el recorrido, se reporta lo siguiente:

- Salí del Distrito Federal el jueves 25 de marzo a las 4:30 de la mañana.
- Me detuve sólo dos veces, la primera en Toluca, para cargar diesel y poner la lona. La segunda en la caseta de cobro, un poco antes de Atlacomulco, para almorzar.
- De Zinapécuaro a Morelia el camino está en reparación.

Interpreta la gráfica para contestar las siguientes preguntas.

- ¿De cuántos kilómetros fue el recorrido? de 302 km
- ¿Cuánto tiempo duró todo el recorrido? 11 horas, 20 min
- ¿En qué parte el tráiler avanzó más rápido?
De Atlacomulco a Zinapécuaro
- ¿En cuál avanzó más despacio? De Zinapécuaro a Morelia
- ¿A qué velocidad promedio recorrió el primer tramo de 60 km? A 40 km/h
- ¿Cuánto tiempo se detuvo el tráiler la primera vez?
1 hora
- ¿Cuánto tiempo se detuvo la segunda vez?
1.5 horas
- ¿A qué hora llegó a Morelia? 15:50

2 Reúnete con algunos compañeros y compañeras. Comparen sus resultados y comenten lo siguiente: ¿Cómo puede averiguarse, a partir de la gráfica, en qué parte el tráiler avanzó más rápido y en cuál más despacio? Entre más pronunciada sea la pendiente de la gráfica, mas rápido avanza el tráiler

- 3** La gráfica 2 corresponde a un paseo que dio Mario. Interpretala, es decir, indica cómo fue su movimiento desde que empezó hasta que terminó.

Caminó los primeros 250m en 5 min

se detuvo 20 min y caminó otros

250m en 5min

- 4** Las rectas de la gráfica 3 corresponden al movimiento de tres ciclistas, A, B y C, quienes salieron al mismo tiempo y del mismo lugar.

La tabla contiene la relación entre la distancia recorrida y el tiempo de los tres ciclistas.

a) Anota a qué ciclista corresponde cada columna.

b) Escribe debajo de cada columna la regla de correspondencia de cada relación.

x (min)	Ciclistas		
	C	B	A
y (km)	y (km)	y (km)	y (km)
0	0	0	0
20	4	8	12
40	8	16	24
60	12	24	36

$y = \frac{x}{15}$ $y = \frac{2x}{5}$ $y = \frac{3x}{5}$

- 5** María y Sonia jugaron a ver quién llegaba más lejos en una carrera de 30 segundos. Ya que María es más pequeña, Sonia la dejó ponerse 15 metros adelante.

Contaron hasta tres y salieron corriendo. A los 30 segundos Juan, que hacía de juez, les gritó ¡alto!

Las dos rectas de la gráfica 4 describen la relación entre el tiempo y la distancia que recorrieron las niñas. Interpreta la gráfica.

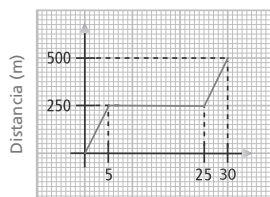
María corre desde la posición 15m hasta

la de 21m en 30 seg; Sonia corre desde la

salida hasta los 50m en 30 seg

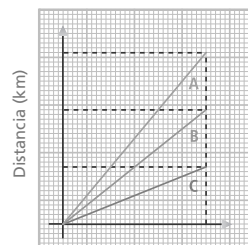
- 6** Reúnete en equipo, y comparen y comenten sus respuestas. Vean si todos encontraron que, en el último problema, Sonia rebasa a María. Averigüen, si no lo han hecho, a los cuántos segundos la rebasa. En el segundo 10

GRÁFICA 2



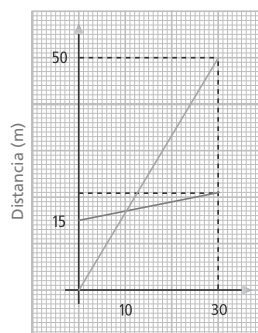
Tiempo (min)

GRÁFICA 3



Tiempo (min)

GRÁFICA 4



Tiempo (s)

5.2. Cálculo de valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas). Relación entre las representaciones que corresponden a la misma situación. Identificación de relaciones de proporcionalidad directa.

Valoración del desempeño

- Calcula valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas).
- Relaciona las representaciones que corresponden a la misma situación.
- Identifica relaciones de proporcionalidad directa.

Sugerencias didácticas

Cada rama de las matemáticas se ha desarrollado para resolver ciertos problemas. De esta manera, la geometría evolucionó por la necesidad de los egipcios de calcular perímetros y áreas de terrenos para determinar el pago de impuestos, así como la trigonometría por el interés de los astrónomos de predecir el movimiento de los cuerpos celestes. El concepto de relación fue impulsado principalmente por la física, ya que al intentar describir el movimiento de ciertos objetos, se estableció la relación entre la distancia que cubre el objeto y el tiempo que está en movimiento.

Se recomienda que pida a los estudiantes efectuar las siguientes actividades por equipos:

- Construye una gráfica que relacione la edad con el peso correspondiente en cada momento y otra gráfica que relacione la edad con la estatura.
- Traza una gráfica que relacione los meses del año con el número de horas de luz diurna en cada uno.
- Traza una gráfica que relacione las horas del día con la temperatura correspondiente en cada una.
- Traza una gráfica que relacione la longitud del lado de un cuadrado con el perímetro correspondiente.
- Traza una gráfica que relacione la longitud del lado de un cuadrado con su área.

Lección 98 Tablas de valores y gráficas

La regla de correspondencia, la tabla de valores y la gráfica son tres maneras de expresar una relación entre dos conjuntos de cantidades. A partir de una de ellas puedes conocer las otras dos.

- 1** Analiza la relación que existe entre los conjuntos de cantidades de cada tabla y haz lo que se indica.

Tabla 1
 $y = x + 2$

x	y
0	2
1	3
2	4
3	5

Tabla 2
 $y = 3x$

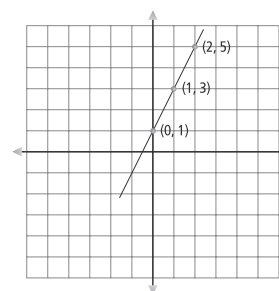
x	y
0	0
1	3
2	6
3	9

Tabla 3
 $y = 2x + 1$

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7

- a) Anota los números que faltan en la tabla 1.
- b) Completa con palabras las reglas de correspondencia de las tablas 2 y 3:
- Tabla 2. Cualquier valor y del segundo conjunto es igual a Al triple de x
 - Tabla 3. Cualquier valor y del segundo conjunto es igual a 1 más el doble de x
- c) Anota en los espacios correspondientes de las tablas 2 y 3 las reglas de correspondencia.
- d) ¿En cuál tabla los conjuntos de cantidades son proporcionales? En la 2

- 2** En el plano cartesiano se representaron algunos pares de coordenadas de la tabla 3 y se unieron con una recta. Esta recta es la gráfica de la regla de correspondencia: $y = 2x + 1$



- a) Haz lo mismo con algunos pares de coordenadas de la tabla 1 y después con algunos de la tabla 2. Traza las rectas con colores diferentes.
- b) De las tres rectas trazadas, hay una que pasa por el origen.

¿A qué tabla corresponde? A la tabla 2

¿Cuál es la regla de correspondencia?

$y = 3x$

- 3** Con base en la regla de correspondencia $y = 2x - 5$, haz lo siguiente:

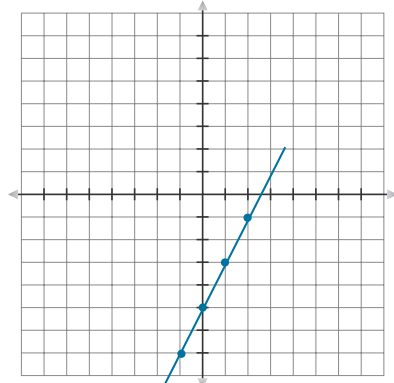
- a) Completa la tabla 4. Para hacerlo, tienes que darle valores a la variable x y en función de estos valores obtienes los de la variable y . Por ejemplo, si x vale 1, $y = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$.

- b) Representa en el plano cartesiano algunos pares de coordenadas y traza la gráfica para esa regla de correspondencia.

Tabla 4

$$y = 2x - 5$$

x	y
1	-3
0	-5
2	-1
-1	-7

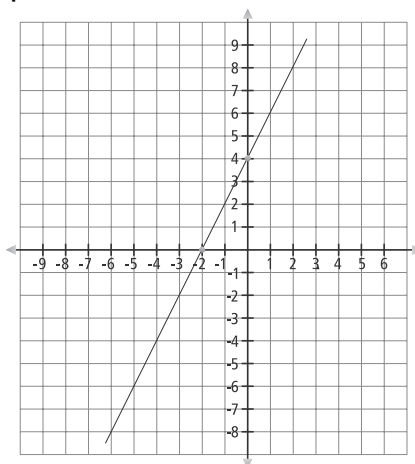


- 4 Con base en la gráfica que se muestra enseguida, elabora la tabla 5 de valores y encuentra la regla de correspondencia.

Tabla 5

$$y = 2x + 4$$

x	y
-6	-8
-2	0
-1	2
0	4
1	6
2	8



- 5 Con ayuda de su profesor o profesora hagan lo siguiente:

- Comparen sus resultados entre todo el grupo.
- Comenten lo siguiente: las reglas de correspondencia que han estudiado tienen esta forma general: $y = mx + b$. Por ejemplo, en la regla de correspondencia $y = 2x - 5$, m vale 2 y b vale -5. Observen que el valor de b es el punto donde la recta corta el eje vertical.
- Escriban algunas reglas en las que b sea igual a 0. Comprueben que los conjuntos de cantidades que se obtienen con esas reglas son proporcionales. $y = -2x$, $y = 15x$, $y = 100x$

- 6 Resuelve el anexo 6 de las páginas 273 a 275.

TECNOLOGÍA

Valoración del desempeño

- Analiza la relación entre la regla de correspondencia, la tabla de valores y la gráfica de una relación.

Otros recursos

En la siguiente página encontrará más información respecto de tablas de valores y gráficas de relaciones:

<http://iesmonterroso.org/dmatematicas/programa/pprograma/4esob/funciones.htm>

Sugerencias didácticas

Se propone aprovechar esta lección para hacer énfasis en que el área de una figura plana no depende de su perímetro; como apoyo para este objetivo, se recomienda la siguiente actividad.

Los alumnos forman diferentes figuras con cinco cuadrados, calculan los perímetros y el área de cada una de las figuras.

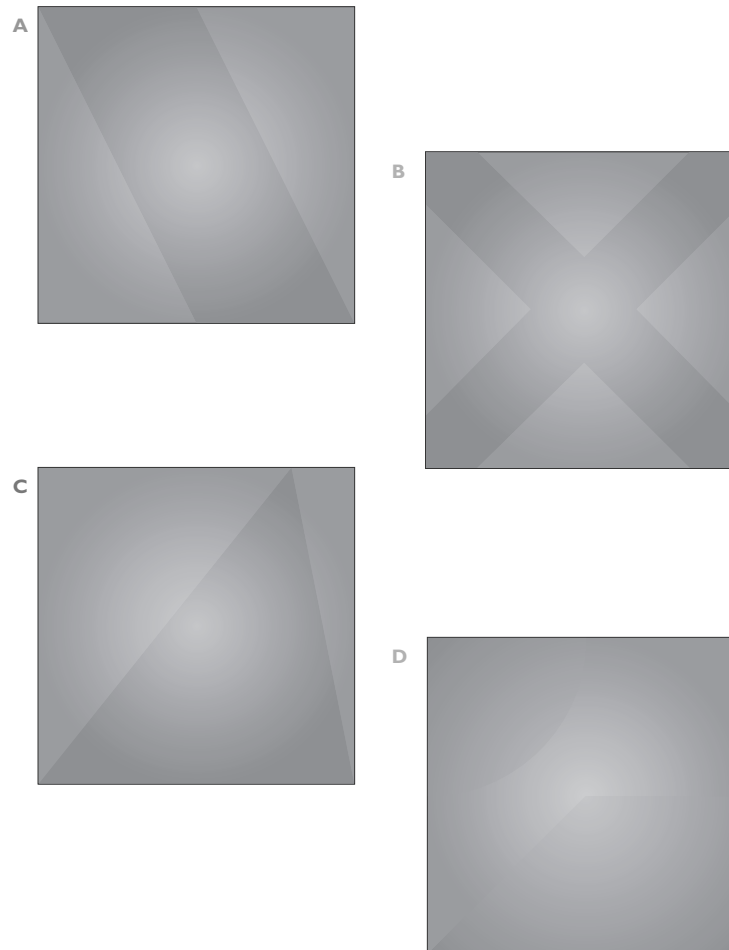
1. Se muestra a los alumnos una figura formada por cinco cuadrados mínimo, y calcular su área.

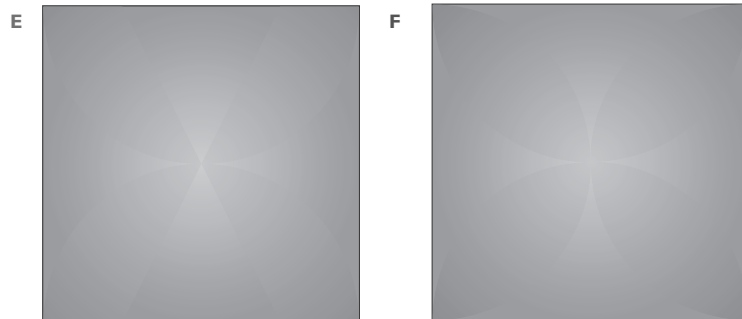
Después de que los alumnos hayan terminado, se les puede hacer ver que existen figuras con perímetros diferentes pero igual área; es decir, el perímetro de una figura no depende de su área.

Lección 99 Diseños

Al comparar superficies, a veces la percepción visual ayuda y otras... ¡jengaña!

- 1 Observa los seis diseños y, sin hacer cálculos escritos, contesta las preguntas de la siguiente página.





- a) ¿En cuál de los diseños la parte roja es menor que la azul? En ninguno
- b) ¿En cuál la parte azul es menor que la roja? En B, D, E y F
- c) ¿En cuáles la parte azul es igual a la roja? En A y en C

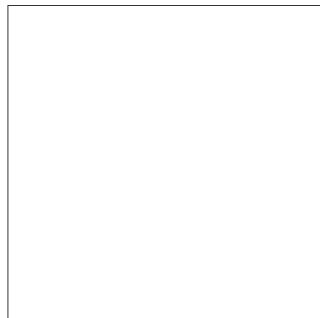
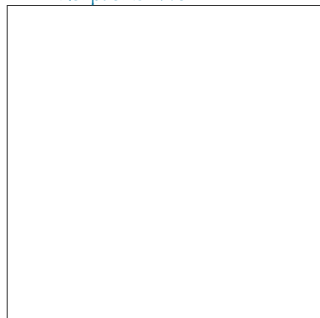
2 Para verificar tus anticipaciones, calcula y anota los datos que se piden en la tabla.

Diseño	Área roja	Área azul	Área total
A	18 cm^2	18 cm^2	36 cm^2
B	20 cm^2	16 cm^2	36 cm^2
C	18 cm^2	18 cm^2	36 cm^2
D	20.6 cm^2	15.4 cm^2	36 cm^2
E	19.3 cm^2	16.7 cm^2	36 cm^2
F	20.5 cm^2	15.5 cm^2	36 cm^2

3 Compara tus procedimientos y resultados con otros compañeros y compañeras del grupo. Expliquen cómo lograron comparar las superficies sin hacer cálculos escritos, en los casos en que lo hayan logrado.

4 Elabora un diseño, diferente de los anteriores, en el que la parte roja sea igual a la azul y otro en el que la roja sea menor que la azul. Usa tu juego de geometría.

Respuesta libre



Valoración del desempeño

- Resuelve problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas.

Otros recursos

Se sugiere consultar, como guía para construcciones y trazos geométricos, el siguiente libro:

J. Álvarez, J. L. Casado y M. D. Gómez, *Dibujo técnico*, Ediciones SM, Madrid, 1997.

Sugerencias didácticas

La siguiente actividad vincula el perímetro de una figura geométrica con las ecuaciones.

Actividad:

Dados dos números positivos s y p , busquen un rectángulo de perímetro $2s$ cm y área p cm² para los siguientes valores de s y p :

$$s = 15 \text{ y } p = 36$$

$$s = 41 \text{ y } p = 402$$

$$s = 39 \text{ y } p = 402$$

A partir del enunciado anterior, en principio es conveniente organizar la clase de modo que puedan formarse al menos seis grupos de alumnos, con el fin de que cada uno reciba un par de valores y por lo menos dos grupos distintos trabajen con el mismo par. Esto permitirá, durante la puesta en común, la confrontación de procedimientos y resultados por parte de cada grupo, para continuar luego con la elaboración de conclusiones en conjunto y el reconocimiento de los nuevos conocimientos enseñados.

Los valores de s y p han sido seleccionados de modo tal que el problema tenga una solución entera (a), una solución irracional (b) y una sin solución (c). Por otra parte, la elección de valores enteros se realizó con el propósito de facilitar la tarea de los alumnos en el sentido de que la complejidad del cálculo no desvíe el objetivo central del problema.

La respuesta al inciso a) puede lograrse por medio de muy pocos intentos numéricos (tanteo). Es decir, buscar valores para x y y tales que su suma sea 15, calcular su producto y compararlo con 36. Para resolver el inciso b), los alumnos deberán formular o reformular el problema en el marco algebraico $2x + 2y = 2s$; $(x) - (y) = p$, o bien, $x + y = s$; $(x) - (y) = p$.

Después de una etapa de familiarización que permita a los alumnos darse cuenta de que no es posible encontrar la solución por tanteo, pueden desplegar distintos procedimientos, como por ejemplo, dibujar varios rectángulos de perímetro 41 y calcular su área, u organizar sus resultados en una tabla de cuatro columnas: x , y , $x + y$, $(x)(y)$, buscando el valor 402 en la última columna. Pronto constatarán que no es posible encontrar ese número.

Si los alumnos trabajan únicamente con valores enteros de x y de y , pueden pensar que el problema no tiene solución, dado que en este caso no es posible encontrar valores que verifiquen las condiciones del

Lección 100 Dimensiones desconocidas

Cuando se conocen las medidas de algunas dimensiones de una figura se puede calcular su área y su perímetro. ¿Sabías que también se puede hacer lo inverso, es decir, se puede calcular la medida de una dimensión si se conoce el área o el perímetro y la medida de otras dimensiones?

1 Resuelve los siguientes problemas. Para ello, plantea una ecuación como las que aprendiste en las lecciones 52 a 56 y resuélvela. Observa el ejemplo.

a) Doña Luisa puso listón alrededor de un pañuelo cuadrado. Ocupó 1.6 m. ¿Cuánto mide el lado del pañuelo?

Si x representa el lado del pañuelo, la ecuación es:

$$4x = 1.6$$

$$x = \frac{1.6}{4}$$

$$x = 0.4 \text{ m}$$

Solución: Cada lado mide 0.4 m.

b) Un corte rectangular de tela mide 30 m de largo y tiene un área de 15 m². ¿Cuánto mide de ancho?

Ecuación:

$$30x = 15$$

$$x = 0.5 \text{ m}$$

Solución: Mide 0.5m de ancho

c) ¿Cuál es la altura de un romboide que tiene un área de 16 cm² y una base de 4 cm?

Ecuación:

$$4x = 16$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

Solución: Su altura es de 4 cm

d) El perímetro de un rectángulo mide 9 cm y el largo mide 3 cm. ¿Cuánto mide el ancho?

Ecuación:

$$2(3 + x) = 9$$

$$x = 1.5 \text{ cm}$$

Solución: El ancho mide 1.5 cm



2 Compara con tus compañeros y compañeras de grupo las ecuaciones que cada uno planteó. Revisen cómo las resolvieron.

3 En los siguientes problemas también tienes que calcular alguna de las medidas de una figura, pero ahora no es necesario que plantees una ecuación; resuélvelos con el procedimiento que prefieras.

a) ¿Cuánto mide cada lado de un vidrio cuadrado con un área de 2.25 m^2 ?

Respuesta: 1.5 m

b) Se va a cercar con barandal un jardín cuadrado cuya área es de 49 m^2 . Sólo se necesita cerca para dos lados porque en los otros dos hay un muro. Si el herrero cobra \$200 el metro de barandal, ¿cuánto se le debe pagar?

Respuesta: \$2,800

c) Un triángulo mide 50 cm^2 de área. Si la base mide 10 cm , ¿cuánto mide la altura?

Respuesta: 10 cm

d) Se tiene un cuadrado como el siguiente:



Si se aumenta cada lado al doble, su perímetro es 72 cm . ¿Cuál es el valor de x ?

Respuesta: 9cm

e) La longitud de un terreno rectangular es el triple de su ancho; si su perímetro mide 80 m , ¿cuáles son sus dimensiones?

Respuesta: largo = 30m ancho = 10m

f) Se tiene la siguiente información de un departamento rectangular: su área es de 60 m^2 ; tanto la medida del largo como la del ancho son metros completos. ¿Cuáles pueden ser sus dimensiones? Encuentra todas las respuestas y subraya las que son más probables para un departamento.

Respuestas: $1 \times 60, 2 \times 30, 3 \times 20, 4 \times 15, 5 \times 12, 6 \times 10$

4 Comenta y compara tus resultados y procedimientos con tus compañeras y compañeros de grupo.



5.3. Resolución de problemas del cálculo de perímetros y áreas y su vinculación con el tema de ecuaciones.

problema. Sería necesario que usted propicie el trabajo con números decimales a partir de preguntas tales como: ¿existe algún rectángulo tal que las medidas de sus lados estén comprendidas entre los pares considerados? Las sucesivas aproximaciones decimales permitirán concluir que no es posible “llegar exactamente a 402”, y ésta es la forma adecuada para introducir (o profundizar en) la noción intuitiva de número irracional. La utilización de calculadoras científicas facilita la tarea de los alumnos.

También es posible que los alumnos dibujen varios rectángulos de perímetro 41 por el método de compensación, que es adecuado para trabajar la propiedad: entre todos los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado es el de mayor área.

Asimismo, pueden representar gráficamente ambas ecuaciones e intentar aproximarse a las condiciones bajo las cuales ambas gráficas se intersecan. De no suceder, resultaría interesante proponer este trabajo. En el caso del inciso c), los intentos numéricos y gráficos no permiten que los alumnos determinen el rectángulo. Esta vez no hay puntos comunes en las gráficas de ambas ecuaciones: todos los pares que verifican $x + y = 39$ son menores que 402, incluso en el caso del cuadrado.

Resultaría conveniente preguntar si es posible encontrar un rectángulo de igual perímetro que el de un cuadrado y cuya área sea mayor.

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas de cálculo de perímetros y áreas involucrando ecuaciones algebraicas.

Sugerencias didácticas

En esta lección se sugiere retomar lo estudiado en lecciones anteriores respecto de la proporcionalidad. Es conveniente inducir al estudiante a inferir la relación que hay entre la forma, el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos de más de cuatro lados.

El área y el perímetro de una figura geométrica son un claro ejemplo de una relación que no es de proporcionalidad, ya que no depende un dato del otro.

La transición de la aritmética al álgebra enfrenta a los estudiantes con nuevos conceptos y demanda la adquisición de nuevas habilidades, de tal modo que en esa transición surgen diversos retos y dificultades. Por esta razón se le recomienda a usted que integre el enfoque geométrico al enfoque algebraico bajo la forma de “acertijos”, que consisten en “adivinar” cuáles deben ser las medidas de una figura para obtener un área o un perímetro dados.

Lección 101 Áreas y variación

Cuando las medidas de los lados de un cuadrado aumentan al doble, ¿el área también aumenta al doble?, ¿y el perímetro?

1 Completa la tabla y responde.

Medida de un lado (cm)	Cuadrado	
	Perímetro (cm)	Área (cm ²)
0	0	0
1	4 cm	1 cm ²
2	8 cm	4 cm ²
3	12 cm	9 cm ²
4	16 cm	16 cm ²
5	20 cm	25 cm ²
6	24 cm	36 cm ²
7	28 cm	49 cm ²

d) ¿Por qué? Porque $\frac{\text{área}}{\text{lado}}$ no es constante

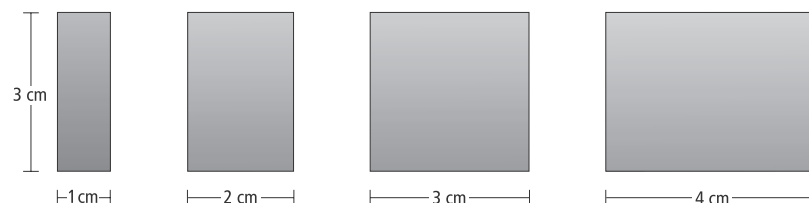
a) Los perímetros de varios cuadrados ¿son proporcionales a las medidas de los lados de esos cuadrados?

Sí

b) ¿Por qué? Porque si el lado aumenta, el perímetro aumenta proporcionalmente

c) ¿Las áreas de varios cuadrados son proporcionales a las medidas de los lados? No

2 Considera 10 rectángulos con estas características: todos tienen un lado de 3 cm. El otro lado mide, en el primer rectángulo, 1 cm; en el segundo, 2 cm; en el tercero, 3 cm; y así sucesivamente hasta llegar a 10 cm. A continuación aparecen los primeros cuatro rectángulos:



a) Completa la tabla.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Perímetro (cm)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Área (cm ²)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

b) Contesta:

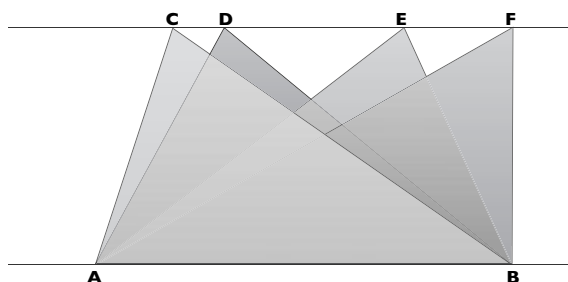
- Cuando un lado de un rectángulo es fijo y el otro variable, ¿los perímetros de los rectángulos que se van obteniendo son proporcionales a las medidas del lado variable?

No ¿Cómo lo sabes? Porque mientras la base aumenta, la altura permanece constante

- ¿Las áreas de los rectángulos son proporcionales a las medidas del lado variable? Si
- ¿Cómo lo sabes? área no es constante

3 Compara tus respuestas con las de tus compañeros y compañeras y comenta con ellos cómo las obtuviste.

4 Considera los triángulos ABC, ABD, ABE y ABF.



a) Completa la tabla, para ello mide lo que sea necesario.

Triángulo	Base	Altura	Perímetro	Área
ABC	7.85 cm	4.5 cm	20.35 cm	17.66 cm ²
ABD	7.85 cm	4.5 cm	19.95 cm	17.66 cm ²
ABE	7.85 cm	4.5 cm	20.05 cm	17.66 cm ²
ABF	7.85 cm	4.5 cm	21.35 cm	17.66 cm ²

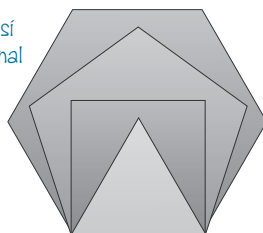
b) En la figura traza otros dos triángulos que cumplan con lo siguiente:

- deben tener la misma área que los anteriores;
- el perímetro de uno de los triángulos debe ser menor que el perímetro de los que ya están y el del otro debe ser mayor.

5 Se trazan polígonos regulares con diferente número de lados pero conservando siempre la medida de sus lados: 2.5 cm. Completa la tabla y determina si el perímetro es proporcional al número de lados.

Número de lados	Perímetro
3	1.5 cm
4	10 cm
7	17.5 cm
10	25 cm
15	37.5 cm
20	50 cm

El perímetro sí es proporcional



6 Compara con tus compañeras y compañeros tus respuestas de las actividades 4 y 5.

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas de cálculo de perímetros y áreas vinculados con variación proporcional.
- Comprende cuándo una relación es proporcional o no proporcional.

Sugerencias didácticas

Aplicamos la probabilidad a casi todas las decisiones conscientes que tomamos. La ropa que nos ponemos depende de nuestra apreciación del tiempo atmosférico; cuando atravesamos una calle, nos aseguramos de que la probabilidad de chocar con un vehículo sea aceptablemente pequeña; se compran bombillas “por si acaso”; en el sector de los seguros en su conjunto, ya sean de vida, de determinadas posesiones u otros, todo se basa en valoraciones de los riesgos. Si los seres humanos no hubiesen sido capaces de manejar intuitivamente y de forma natural muchas ideas en las que interviene la probabilidad, nuestra civilización nunca hubiese podido evolucionar.

En los juegos de azar la probabilidad desempeña una función principal. Se sugiere que inicie en el grupo una discusión respecto de los juegos de azar que los alumnos conocen, cuáles son equitativos y cuáles no lo son.

Lección 102 Juegos equitativos I

Algunos juegos de azar son divertidos, pero hay que tener cuidado porque la probabilidad de perder puede ser mayor que la probabilidad de ganar.



1 Reúnete con otros dos compañeros o compañeras para jugar a lanzar dos dados. Cada uno debe escoger una de las siguientes opciones para ganar:

- que los dos dados caigan en número par;
- que los dos dados caigan en número impar;
- que un dado caiga en número par y el otro impar.



Antes de empezar a jugar:

- discutan si el juego es equitativo, es decir, si las tres opciones tienen igual probabilidad de ganar;
- cada uno elija una opción de ganar;
- hagan en su cuaderno una tabla como la siguiente para registrar los resultados.

	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Número esperado de veces
Dos números pares	respuesta	15	.25	15
Dos números impares	variable	15	.25	15
Un par y un impar		30	.5	30
Total		60	1	60

- El número total de veces que van a lanzar los dados es 60. ¿Cuántas veces esperan que caigan dos números pares y dos números impares? ¿Cuántas veces un par y un impar? Antes de empezar a jugar, anoten estos números en la quinta columna de la tabla.
- En la columna de **Recuento** pongan marcas, que pueden agrupar de cinco en cinco; así (///). La frecuencia absoluta es el número de marcas y la frecuencia relativa, el número de marcas entre el total de lanzamientos.

Ahora sí, ¡a jugar!



2 Con ayuda del docente, concentren los resultados del grupo en una tabla que dibujen en el pizarrón. Después comenten las siguientes preguntas.

- ¿Consideran que el juego es equitativo? No ¿Por qué? Porque la frecuencia relativa del tercer caso, es el doble de cada una de las otras

b) De acuerdo con los resultados de la tabla:

- ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso "dos números pares"? 0.25
- ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso "dos números impares"? 0.25
- ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso "un par y un impar"? 0.50

3 Completa la tabla para que puedas observar los 36 resultados posibles del experimento que consiste en lanzar dos dados. Después contesta las preguntas.

a) De los 36 resultados posibles:

- ¿Cuántos corresponden a dos números pares? 9
- ¿Cuántos corresponden a dos números impares? 9
- ¿Cuántos corresponden a un par y un impar? 18

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b) ¿Cuál es la probabilidad teórica del suceso "dos números pares"? (Si no recuerdas lo que significa "probabilidad teórica", consulta la lección 73, "La medida de lo probable.") 0.25, 15, 30, 60,

c) ¿Y del suceso "dos números impares"? 0.25

d) ¿Y del suceso "un par y un impar"? 0.5

e) Explica por qué el juego que realizaste con tus dos compañeros o compañeras no es equitativo:

Porque la probabilidad teórica de los tres casos no es la misma

4 Con ayuda de tu profesor o profesora, comparen en grupo los resultados de la actividad 3.

5 Junto con un compañero o compañera realiza lo siguiente.

- a) Tracen en su cuaderno una tabla como la de la página anterior; pero considerando sólo dos sucesos: "la suma es un número par" y "la suma es un número impar".
- b) Cada uno elija uno de los sucesos: lancen los dados 60 veces y registren los resultados en la tabla.
- c) Determinen si el juego es equitativo y expliquen por qué: Sí, porque la frecuencia relativa teórica es igual en los dos casos

Valoración del desempeño

- Reconoce cuándo un juego de azar es equitativo y cuándo no lo es.

Otros recursos

Se sugiere al profesor leer el siguiente libro, en el que se expone de forma amena una introducción a la probabilidad:

John Haigh, *Matemáticas y juegos de azar*, Editorial Metatemas, Barcelona, 2003.

Sugerencias didácticas

En gran cantidad de experimentos aleatorios es necesario cuantificar los resultados, es decir, asignar a cada resultado del experimento un número, con el fin de poder realizar un estudio matemático.

Ejemplos:

- Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas; supongamos que a cada elemento de su espacio muestral $E = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xc x, xxc, xxx\}$ le asignamos un número real, el correspondiente al número de caras (*discreta*).
- Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas; supongamos que a cada elemento de su espacio muestral $E = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xc x, xxc, xxx\}$ le asignamos un número real, el correspondiente al número de caras (*discreta*).
- Supongamos el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados; podemos asignar a cada resultado la suma de los puntos aparecidos en cada dado (*discreta*).
- Consideremos el experimento que consiste en elegir al azar a 500 personas y medir su estatura. La ley que asocia a cada persona con su talla es una variable aleatoria (*continua*).
- Consideremos el experimento que consiste en elegir al azar 100 sandías de una plantación y pesarlas. La ley que asocia a cada sandía con su peso es una variable aleatoria (*continua*).

Se recomienda al profesor pedir a los alumnos dar más ejemplos de eventos en los cuales sería necesario cuantificar los resultados.

Lección 103 Juegos equitativos II

Cuando un juego no es equitativo se puede lograr que lo sea, modificando algunas condiciones.



1 Reúnete con un compañero o compañera y lean lo siguiente.



Juan y María realizan el siguiente juego:

- Cada uno inicia el juego con 20 fichas.
- Lanzan dos dados y calculan la diferencia entre los números que salen.
- Si la diferencia es 0, 1 o 2, María gana y Juan le da una de sus fichas.
- Si la diferencia es 3, 4 o 5 Juan gana y María le da una de sus fichas.
- El juego termina cuando uno de los dos se queda sin fichas.

a) Comenten si el juego les parece equitativo o no. Anoten su conclusión: No es

equitativo

b) Realicen el juego y verifiquen si es verdad lo que concluyeron. De nuevo contesten la pregunta:

¿el juego es equitativo? No

c) Teóricamente, el juego **no** es equitativo, porque la probabilidad de que la diferencia sea 0, 1 o 2 es mayor que la probabilidad de que la diferencia sea 3, 4 o 5. Para comprobar esta afirmación realicen lo siguiente:

Revisen la tabla de la lección 101, "Juegos equitativos I", en la que aparecen los 36 resultados que es posible obtener al lanzar dos dados. Calculen las diferencias y anótenlas en la siguiente tabla.

¿En cuántos de los 36 casos la diferencia es 0, 1 o 2? En 24

	1	2	3	4	5	6
1	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	(1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
3	(2)	(1)	(0)	(1)	(2)	(3)
4	(3)	(2)	(1)	(0)	(1)	(2)
5	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)	(1)
6	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)

Teóricamente, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia sea 0, 1 o 2?

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

¿En cuántos de los 36 casos la diferencia es 3, 4 o 5? En 12

En teoría, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia sea 3, 4 o 5?

$$\frac{1}{3}$$

d) Como pueden darse cuenta, María tiene ventaja en el juego, pues su probabilidad de ganar es $\frac{2}{3}$, mientras que la probabilidad de que Juan gane es $\frac{1}{3}$. Así, María tiene el doble de probabilidad de ganar que Juan. Para que el juego sea equitativo, María tendría que dar más fichas que Juan. Si Juan da una ficha cuando María gana, ¿cuántas fichas debería dar María cuando Juan gana, para que el juego sea justo? 2

2 Con ayuda del profesor o profesora comparen sus respuestas en grupo. Si hay discrepancias, traten de averiguar quién tiene razón.

3 Juega con un compañero o compañera a lanzar dos monedas al aire. Uno de ustedes gana si las monedas coinciden, es decir, si las dos caen en águila o en sol. El otro gana si una moneda cae en águila y la otra en sol. Repitan el experimento 40 veces y registren los resultados en la siguiente tabla. Antes de iniciar el juego, cada uno elija un suceso y en la última columna anoten lo que esperan que suceda.

Sucesos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Número esperado de veces
Suceso A: las monedas coinciden	20	20	.5	20
Suceso B: las monedas no coinciden	20	20	.5	20
Total	40	40	1	40

a) Sumen las frecuencias absolutas de todas las parejas del grupo y con esa información calculen las frecuencias relativas de los sucesos A y B. Anótenlas a continuación.

• Frecuencia relativa del suceso A: 0.5 • Frecuencia relativa del suceso B: 0.5

b) ¿Consideran que es un juego equitativo? Sí ¿Por qué? Porque la probabilidad de que suceda A es la misma de que suceda B

Noten que las **frecuencias relativas** son las medidas de la probabilidad frecuencial de los sucesos A y B expresadas en forma decimal.

4 Imagina ahora que juegas con un compañero a lanzar tres monedas. En este caso los sucesos serían: (A) “Disparejo”, si caen dos águilas y un sol o dos soles y un águila, y (B) “Tres iguales”, si caen tres soles o tres águilas.

a) Dibuja en tu cuaderno un diagrama de árbol para encontrar todos los resultados posibles de este experimento. En total deben ser ocho resultados. Contesta lo siguiente:

• De los ocho resultados posibles, ¿cuántos corresponden al suceso A? 6

• ¿Cuántos corresponden al suceso B? 2

• Teóricamente, ¿cuál es la probabilidad del suceso A? 0.75

• ¿Cuál es la probabilidad del suceso B? 0.25

b) En teoría, la probabilidad del suceso A es el triple que la del suceso B; por lo tanto el juego no es equitativo. Una manera de hacerlo equitativo es la siguiente. Complétala.

• Cada vez que se da el suceso A, el jugador recibe 1 fichas.

• Cada vez que se da el suceso B, el jugador recibe 3 fichas.

Valoración del desempeño

– Analiza las condiciones para que un juego sea equitativo.

Otros recursos

Se sugiere invitar a los alumnos a ingresar al siguiente sitio, donde encontrará una gran variedad de juegos matemáticas relacionados con la probabilidad:

<http://www.matejoven.mendoza.edu.ar/matejue/matejueg.htm>

Sugerencias didácticas

Como resultado de la actividad 1, el alumno habrá podido observar que en la relación entre el alto y el ancho de los rectángulos de la misma área, si se **invierte** la razón entre los datos correspondientes, se forma una proporción. Por eso este tipo de relaciones es de **proporcionalidad inversa**.

Decimos que una función es de proporcionalidad inversa cuando la relación numérica entre sus variables es de proporcionalidad inversa. Su expresión algebraica es $y = k/x$. La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una curva, simétrica respecto del origen de coordenadas, que se llama *hipérbola*. La gráfica de las funciones de proporcionalidad inversa no pasa por el origen de las coordenadas (0, 0).

Siendo k la constante de proporcionalidad inversa:

- Si k es positiva, la gráfica se sitúa en el 1er. y 3er. cuadrantes.
- Si k es negativa, está en el 2o. y 4o. cuadrantes.
- Si $|k| > 1$, la parábola se aleja del origen, y si $|k| < 1$, se acerca.

Lección 104 Relaciones inversamente proporcionales I

¿Conoces el dicho: "Entre menos burros más olotes"? Hay relaciones entre cantidades en las que, como reza el dicho, al disminuir una cantidad aumenta la otra.

- 1 Dibuja en papel cuadriculado todos los rectángulos que puedas, que tengan una superficie de 36 cuadros, por ejemplo, lado A de una unidad y lado B de 36 unidades.



Anota en la tabla las dimensiones de los rectángulos que dibujaste.

- 2 Forma un equipo de tres o cuatro integrantes, comparen sus rectángulos y agreguen a la tabla de cada uno los que no tengan.

- 3 Contesta las siguientes preguntas:

- a) Cuando el lado A crece, ¿qué sucede con el lado B? Decrece
- b) Si el lado A crece al doble, por ejemplo, de 3 unidades a 6

unidades, ¿qué sucede con el lado B? Decrece a la mitad

Si el lado A crece al triple, por ejemplo, de 2 unidades a 6

unidades, ¿qué sucede con el lado B? Decrece a la 3ª parte

- c) ¿Las medidas del lado B son directamente proporcionales a las medidas del lado A? No

¿Cómo lo sabes? Porque al aumentar el lado A, no aumenta el lado B

Dada una relación entre dos conjuntos de cantidades, cuando una cantidad de un conjunto **aumenta** n veces y la cantidad del otro conjunto **disminuye** n veces, se dice que las cantidades de uno de los conjuntos son **inversamente proporcionales** a las cantidades del otro.

En un conjunto de rectángulos de área dada, las medidas de un lado son inversamente proporcionales a las medidas del otro lado.

- d) Cuando las cantidades de dos conjuntos son **directamente** proporcionales, el cociente de cantidades que se corresponden es constante. Analiza los datos de la tabla de la actividad 1 y trata de identificar qué es constante cuando las cantidades son **inversamente** proporcionales

El producto de los factores es la constante

Cuando las cantidades de un conjunto son **inversamente proporcionales** a las de otro, sucede que el producto de las cantidades que se corresponden siempre es el mismo, es decir, es constante.

Área = 36 cuadros	
Medida del lado A (x)	Medida del lado B (y)
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3
18	2
36	1

- e) Identifica las dos expresiones que corresponden a la relación entre las medidas de los lados **A** y **B**. Las medidas del lado **A** se representarán con la letra **x** y las medidas del lado **B** se representan con la letra **y**.

$$y = 36x$$

$$xy = 36$$

$$y = x + 36$$

$$y = \frac{x}{36}$$

$$y = \frac{36}{x}$$

- 4** La gráfica corresponde a la relación entre los lados del rectángulo de área 36, $y = \frac{36}{x}$.

- a) Verifica que las parejas de medidas que encuentres para los lados **x** y **y** son coordenadas de puntos de la gráfica. Por ejemplo, verifica si el punto de coordenadas (1, 36) pertenece a la gráfica.

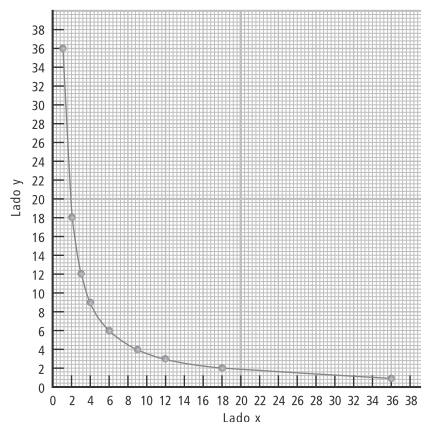
- b) Observa que los puntos no están alineados. La curva que forman se llama **hipérbola**.

- c) Ubica el punto que tiene por abscisa el número 8.

¿Cuál es su ordenada? 4.5

Verifica que esa abscisa y esa ordenada sean las medidas de los lados de un rectángulo de área 36:

$$8 \times 4.5 = 36$$



- d) Verifica que las coordenadas de cualquier otro punto de la gráfica sean las medidas de los lados de un rectángulo de área 36.

- e) Según la gráfica, cuando los valores de las abscisas (**x**) decrecen, ¿qué sucede con los valores de las ordenadas (**y**)? Crecen. Cuando las abscisas crecen, ¿qué sucede con los valores de las ordenadas? Decrecen.

- 5** Para cada situación, encuentra los valores que faltan, anota la regla de correspondencia **y**, en el último renglón, indica si la situación es de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa o ninguna de las dos.

a) Quedan 2 000 l de agua en la reserva.		b) Un vehículo consume 13 l de gasolina por kilómetro.		c) Un automovilista debe recorrer 600 km.		d) La tarifa del taxi es de \$12.50, más \$3.50 por kilómetro.	
Si se consumen diariamente (x)	Alcanzaría para... (y)	Kilómetros (x)	Litros (y)	Si va a la velocidad de... (x)	Tardaría... (y)	Número de km (x)	Cantidad a pagar (y)
10 l	200 días	100	1300 l	60 km/h	10 h	1	\$16
20 l	100 días	200	2600 l	100 km/h	6 h	2	\$19.50
50 l	40 días	500	6500 l	120 km/h	5 h	4	\$26.50
$y = 2000/x$ inversa		$y = 13x$ directa		$y = 600/x$ inversa		$y = 12.5 + 3.5x$ Ninguna	

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas que involucran proporcionalidad inversa.
- Grafica una regla de proporcionalidad inversa.
- Determina la regla de correspondencia de una relación de proporcionalidad inversa.

Otros recursos

Se sugiere al profesor acceder a la siguiente página de Internet para obtener más ejemplos de problemas de proporcionalidad inversa y sus gráficas:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funciones_formas_de_expresar/inversa.htm

Sugerencias didácticas

En esta lección retomamos la proporcionalidad inversa con más ejemplos. Se sugiere que el estudiante esta vez cree sus propias relaciones de proporcionalidad.

Una vez que el alumno ha asimilado la noción de proporción directa, la idea de proporción inversa le será más sencilla de entender. La proporción inversa es una relación que se presenta constantemente en la vida cotidiana. Por ejemplo, si un estanque se vacía a través de un grifo de forma constante, el tiempo y la cantidad de agua en el estanque varían en forma inversamente proporcional, es decir, el tiempo aumenta a la misma velocidad que disminuye el contenido del tanque.

Otra forma en la que se le puede explicar la proporción inversa al alumno es la siguiente: dos magnitudes son inversamente proporcionales si existe una relación entre ellas de tal forma que al multiplicar cualquier cantidad de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido por el mismo número.

Ejemplo:

En el reparto de 90 discos entre un grupo de personas, el número de personas y el número de discos que le corresponde a cada una son inversamente proporcionales.

Núm. personas	1	2	3	5	6	
Núm. discos	90	45	30	18	15	

La regla de correspondencia de esta relación es: $y = \frac{90}{x}$

Lección 105 Relaciones inversamente proporcionales II

Las relaciones de proporcionalidad directa o inversa no sólo se pueden estudiar y aprender, también se pueden crear.

1 Realiza lo que se indica.

a) Lee las siguientes instrucciones para crear tres relaciones de proporcionalidad.

Primero se plantea una situación multiplicativa, por ejemplo:

Número de niños por número de cuadernos por niño = número total de cuadernos

I. Para crear la **primera relación** se fija el valor del primer factor; por ejemplo, el número de niños siempre es 20. El número total de cuadernos variará en función del número de cuadernos por niño.

Por ejemplo, un maestro entrega a veces un cuaderno, a veces dos, etc., a cada uno de los 20 alumnos de un grupo.

Hay 20 alumnos	
Núm. de cuadernos por alumno (x)	Núm. total de cuadernos (y)
1	20
2	40
3	60

II. Para crear la **segunda relación** se fija el segundo factor; por ejemplo, 3 cuadernos por niño. El número total de cuadernos variará ahora en función del número de alumnos.

Por ejemplo, un director entrega tres cuadernos a cada niño. En primer grado hay 10 alumnos; en segundo, 20; etcétera.

Se dan 3 cuadernos por niño	
Núm. de alumnos (x)	Núm. total de cuadernos (y)
10	30
20	60
36	108
40	120

III. Para crear la **tercera relación** se fija el producto, por ejemplo, en total hay 1 000 cuadernos. El número de cuadernos por niño dependerá del número de niños.

Por ejemplo, se dieron 1 000 cuadernos a cada escuela para que los repartieran entre los alumnos. Una escuela tiene 100 alumnos, otra 200, etcétera.

Se dan en total 1000 cuadernos	
Núm. de alumnos (x)	Núm. de cuadernos por alumno (y)
100	10
200	5
250	4
500	2

b) Escribe los datos que faltan en las tablas.

c) Indica si cada relación es de proporcionalidad directa, inversa, o no es de proporcionalidad.

Relación I: Proporcionalidad directa

Relación II: Proporcionalidad directa

Relación III: Proporcionalidad inversa

d) Anota la regla de correspondencia de cada relación:

Relación I: $y = 20x$

Relación II: $y = 3x$

Relación III: $y = 1000/x$

2 Reúnete con una compañera o con un compañero y realicen lo siguiente:

- a) A partir de la siguiente situación multiplicativa, planteen tres relaciones. Para ello decidan el valor que tendrá cada constante, y anótenlo en el encabezado de cada tabla. Decidan los valores de la primera variable (los que van en la primera columna) y calculen los valores de la otra variable.

Cuota de cada miembro por número de miembros = ingreso total de la cooperativa

Relación 1 Cuota por miembro = \$50		Relación 2 Número de miembros = 11		Relación 3 Ingreso total = 550	
Núm. de miembros	Ingreso total	Cuota por miembro	Ingreso total	Núm. de miembros	Cuota por miembro
5	\$250	50	550	5	3000
10	\$500	100	1100	10	1500
15	\$750	500	5500	15	1000
50	\$2500	1000	11000	50	300

- b) Indiquen si las relaciones son de proporcionalidad directa, inversa, o no son de proporcionalidad.

Relación 1: P. directa Relación 2: P. directa Relación 3: P. inversa

- c) Escriban la regla de correspondencia de cada relación

Relación 1: $y = 50x$ Relación 2: $y = 11x$ Relación 3: $y = \frac{1500}{x}$

3 Con ayuda de su profesor o profesora, comparen las respuestas que dieron en la actividad anterior.

4 Escoge una de las situaciones multiplicativas que se presentan en seguida, o propón una, y desarrolla tres relaciones a partir de ella. Haz las tablas en tu cuaderno, como las de la actividad 2. Debajo de cada tabla anota el tipo de proporcionalidad (directa, inversa) y la regla de correspondencia de la relación.

Situaciones para escoger: lado A \times lado B = área del rectángulo

kilómetros por hora por horas del viaje = kilómetros recorridos

Ganancia por silla \times número de sillas vendidas = ganancia total

5 ¿Qué relaciones se forman si se usa una situación aditiva en lugar de una multiplicativa? ¡Compruébalo! Desarrolla y analiza las tres relaciones que se desprenden al fijar un término en la siguiente situación:

lado a + lado b = semiperímetro del rectángulo.

Valoración del desempeño

- Resuelve problemas que involucran proporcionalidad inversa.
- Grafica una regla de proporcionalidad inversa.
- Determina la regla de correspondencia de una relación de proporcionalidad inversa.

Otros recursos

En la siguiente página encontrará más ejercicios que involucran proporcionalidad inversa:

http://www.rmm.cl/index_sub.php?id_contenido=2555&id_seccion=1655&id_portal=266

Sugerencias didácticas

La media, la mediana y la moda son valores que tipifican una muestra y en torno de los cuales se agrupa la mayoría de los datos, éstos se denominan *estadígrafos*.

La media corresponde a la suma de todos los datos, dividida entre el número total de ellos. Es lo que se conoce como “promedio”. La media aritmética es uno de los estadígrafos más usados, por el hecho de que es muy fácil calcularla.

La moda corresponde al valor que más se repite y sirve para describir una distribución si sólo se desea tener una idea aproximada y rápida de dónde está la mayor concentración de observaciones. También se utiliza para describir la forma de algunas distribuciones. Puede ocurrir que en un conjunto de datos no haya moda, como en: {3, 4, 7, 9, 10, 11, 13}. O también que haya varios valores con la mayor frecuencia, en cuyo caso la moda queda indeterminada.

La mediana es aquel valor que ocupa el lugar central, de modo que la mitad de los casos queda por debajo de ese valor, y la otra mitad por arriba. Si consideramos por ejemplo: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 16, 18, 25}. La mediana es $M = 11$. Si el conjunto de valores es un número par, entonces se calcula la media aritmética con los dos valores del centro.

Lección 106 El salario representativo

Cuando un conjunto tiene muchos datos, puede ser útil conocer un dato que sea representativo del conjunto. Pero ¿cuál es el mejor representante?

1 La tabla muestra los salarios del personal administrativo de una empresa.

Cargo	Cantidad	Salario (\$)
Gerente	1	75 000
Subgerente	1	40 000
Contadores	2	20 000 c/u
Secretarias	3	6 000 c/u

- Los miembros del sindicato dicen que el salario representativo de este personal es de \$6 000.
- El subgerente dice que el salario representativo es de \$20 000.
- El gerente indica que el salario representativo es casi de \$25 000.

- a) ¿Quién consideras que tiene razón? El gerente
- b) ¿Por qué lo consideras así? Porque su estimación es más cercana al promedio



2 Compara tus opiniones con las de tus compañeros y compañeras de grupo. Después lean la siguiente información.

Normalmente, una colección de datos puede tener varios valores representativos. Los siguientes valores pueden ser representativos de una colección de datos:

La media aritmética se obtiene al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número de datos.

La mediana es el valor del centro del conjunto de datos cuando están ordenados de menor a mayor o de mayor a menor. Cuando hay dos valores centrales se obtiene la media de ambos para calcular la mediana.

La moda es el dato que más veces se repite, es decir, el que tiene mayor frecuencia. Estos tres valores se llaman “medidas de tendencia central”.

Aunque la media aritmética es la medida que más se utiliza, en muchos casos es más útil la mediana o la moda.

3 Del ejemplo de los salarios:

- a) ¿Quién o quiénes utilizaron la media aritmética para expresar el salario representativo?
- El gerente se aproximó más a la media
- b) ¿Quiénes utilizaron la moda? Los miembros del sindicato
- c) ¿Y la mediana? El subgerente